Zadanie 1

Liczba $5^8 \cdot 16^{-2}$ jest równa

A. 10^8 B. $\left(\frac{5}{2}\right)^8$ C. 10 D. $\frac{5}{2}$

Odpowiedź B.

Zadanie 2

Liczba $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. 3 B. 2 C. $\sqrt[3]{52}$ D. $2\sqrt[3]{2}$

Odpowiedź D.

Zadanie 3.

Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

A. $\log_2 \frac{3}{5}$ B. $\log_2 \frac{9}{5}$ C. $\log_2 \frac{6}{25}$ D. $\log_2 \frac{9}{25}$

Odpowiedź D.

Zadanie 4.

Liczba osobników pewnego zagrożonego wyginięciem gatunku zwierząt wzrosła w stosunku do liczby tych zwierząt 31 grudnia 2011 r. o 120% i obecnie jest równa 8910. Ile zwierząt liczyła populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku?

A. 1782 B. 4050 C. 7128 D. 7425

Odpowiedź B.

Zadanie 5.

Równość $\left(x\sqrt{2} - 2\right)^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2$ jest

A. fałszywa dla każdej liczby x............B. prawdziwa dla $x = -\sqrt{2}$ C. prawdziwa dla $x = \sqrt{2}$
D. prawdziwa dla $x = -1$

Odpowiedź D.

Zadanie 6.

Do zbioru rozwiązań równości $(x^4 + 1)(2 - x) > 0$ nie należy liczba

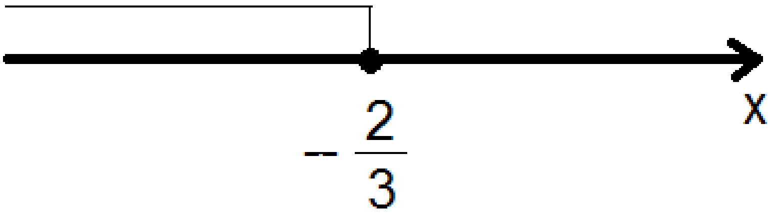
A. 1 B. -1 C. 3 D. -3

Odpowiedź C.

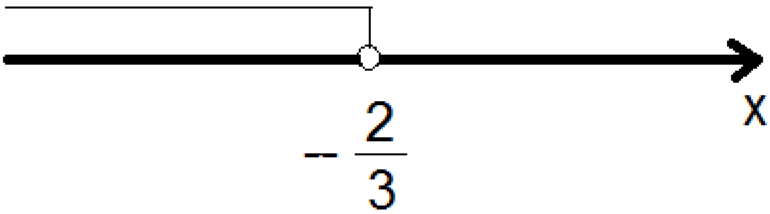
Zadanie 7.

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $2 - 3x \geq 4$

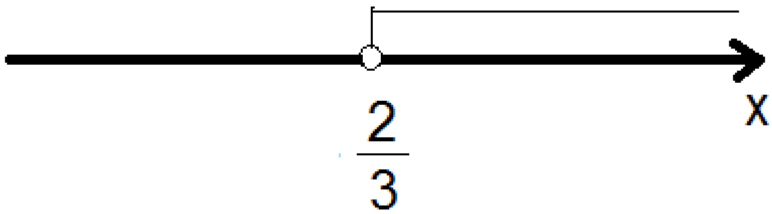
A...



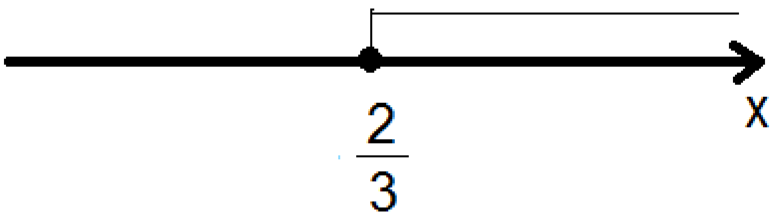
B.



C.



D.



Odpowiedź A

Zadanie 8.

Równanie $x(x^2-4)(x^2+4)=0$ z niewiadomą x

A. ma dokładnie trzy rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych

B. ma dokładnie pięć rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych

C. ma dokładnie 2 rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych

D. nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych

Odpowiedź A

Zadanie 9.

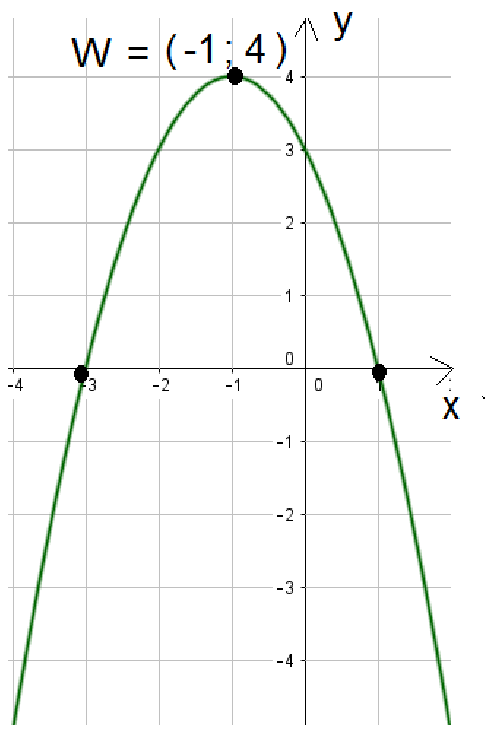
Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=\sqrt{3}(x+1)-12$ jest liczba

A. $-\sqrt{3}+12$ B. $\sqrt{3}+4$ C. $-2\sqrt{3}+1$ D. $4\sqrt{3}-1$

Odpowiedź D.

Zadanie 10.

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$, której miejsca zerowe to: -3 i 1.



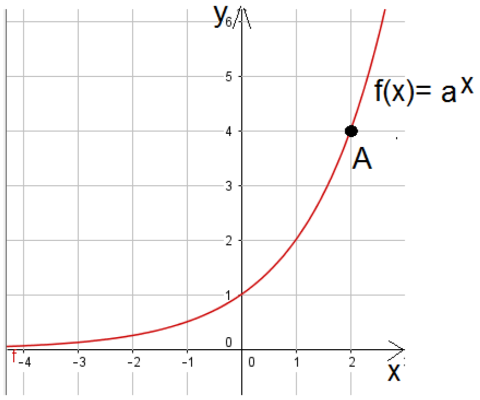
Współczynnik c we wzorze funkcji f jest równy

A. 3 B. 4 C. 1 D. 2

Odpowiedź A.

Zadanie 11.

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$.
Punkt A=(1; 2) należy do tego wykresu funkcji.



Podstawa a potęgi jest równa

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

Odpowiedź B.

Zadanie 12.

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: $a_1 = 5$; $a_2 = 11$. Wtedy

A. $a_{10} = 71$ B. $a_{11} = 71$ C. $a_{12} = 71$ D. $a_{14} = 71$

Odpowiedź C.

Zadanie 13.

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(24; 6; a-1)$. Stąd wynika, że

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Odpowiedź B.

Zadanie 14.

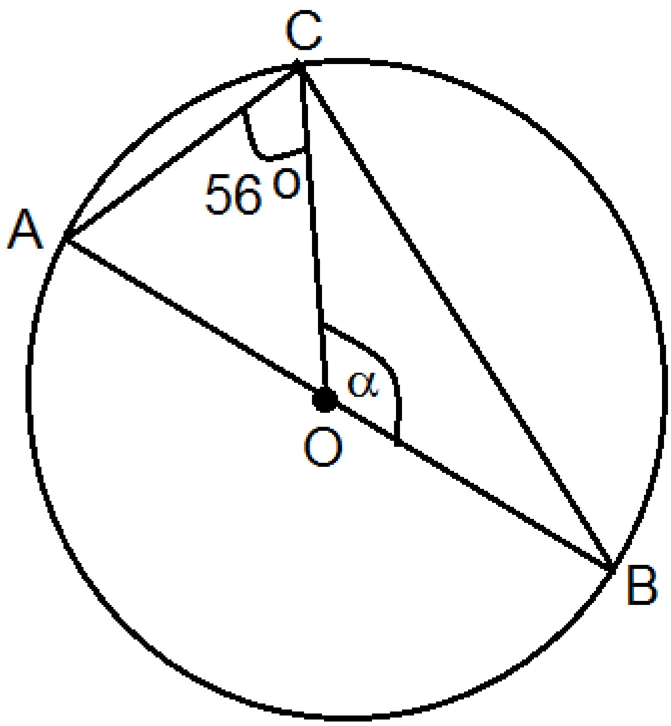
Jeśli $m = \sin 50^o$, to

A. $m = \tan 50^o$ B. $m = \sin 40^0$ C. $m = \cos 40^o$ D. $m = \cos 50^o$

Odpowiedź C.

Zadanie 15.

Na okręgu o środku w punkcie O leży punkt C (zobacz rysunek). Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Zaznaczony na rysunku kąt środkowy α ma miarę

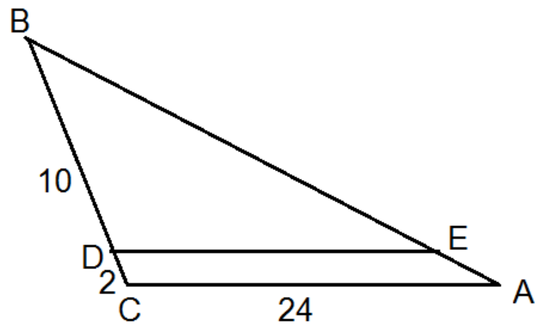


A. 114° B. 116° C. 110° D. 112°

Odpowiedź D.

Zadanie 16.

W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC, a punkt E leży na boku AB. Odcinek DE jest równoległy do boku AC, a ponad to |BD|=10; |BC|=12 i |AC|=24 (zobacz rysunek).



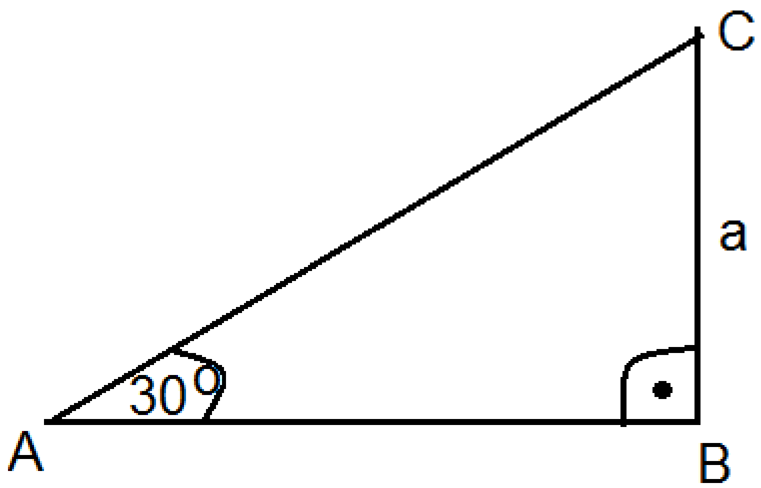
Długość odcinka DE jest równa

A. 20 B. 22 C. 11 D. 12

Odpowiedź A.

Zadanie 17.

Obwód trójkąta ABC , przedstawionego na rysunku, jest równy

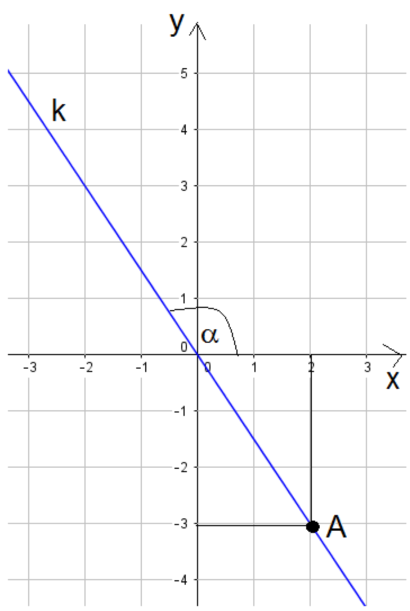


A. $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ B. $\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$ C. $(2+\sqrt{2})a$ D. $(3+\sqrt{3})a$

Odpowiedź D.

Zadanie 18.

Na rysunku przedstawiona jest prosta k, przechodząca przez punkt $A=(2;\ -3)$ i przez początek układu współrzędnych, oraz zaznaczony jest kąt α nachylenia tej prostej do osi Ox.



Zatem

A. $\tan\alpha=\frac{3}{2}$ B. $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ C. $\tan\alpha=-\frac{3}{2}$

D. $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$

Odpowiedź C.

Zadanie 19.

Na płaszczyźnie z układem współrzędnych proste k i l przecinają się pod kątem prostym w punkcie $A=(-2;4)$. Prosta k jest określona równaniem $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$. Zatem prostą l opisuje równanie

A. $y=4x+12$ B. $y=4x-12$ C. $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$ D. $y=-\frac{1}{4}x-\frac{7}{2}$

Odpowiedź A.

Zadanie 20.

Dany jest okrąg o środku $S=(2;3)$ i promieniu $r=5$. Który z podanych punktów leży na tym okręgu?

A. $(3;2)$ B. $(5;3)$ C. $(-1;7)$ D. $(2;\ -3)$

Odpowiedź C.

Zadanie 21.

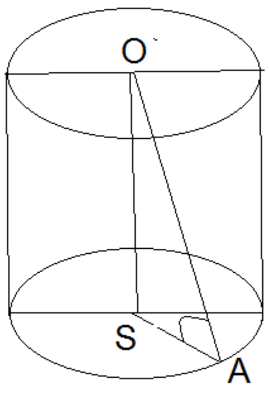
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wysokość jest 3 razy dłuższa od krawędzi podstawy, jest równe 140. Zatem krawędź podstawy tego graniastosłupa jest równa

A. $3\sqrt{10}$ B. $\sqrt{10}$ C. $3\sqrt{42}$ D. $\sqrt{42}$

Odpowiedź B.

Zadanie 22

Promień AS podstawy walca jest równy wysokości OS tego walca. Sinus kąta OAS (zobacz rysunek) jest równy



A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Odpowiedź C.

Zadanie 23.

Dany jest stożek o wysokości 4 i średnicy podstawy 12. Objętość tego stożka jest równa

A. 48π B. 144π C. 192π D. 576π

Odpowiedź B.

Zadanie 24.

Średnia arytmetyczna ośmiu liczb: 3; 5; 7; 9; x; 15; 17; 19 jest równa 11. Wtedy

A. x = 11 B. x = 13 C. x = 1 D. x = 2

Odpowiedź A.

Zadanie 25.

Ze zbioru 24 kolejnych liczb naturalnych od 1 do 24 losujemy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba będzie dzielnikiem liczby 24. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

Odpowiedź C.

Zadanie 26.

Rozwiąż nierówność $8x^2 - 72x \leq 0$.

Rozwiązanie

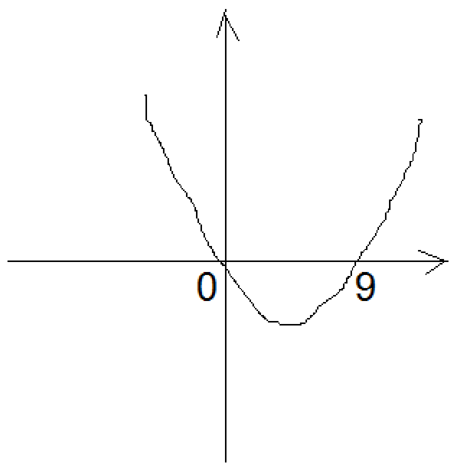
Wyłączamy przed nawias 8x

$8x(x-9) \leq 0$

Wynika z tego, że

$x_1 = 0 \quad lub \quad x_2 = 9$

Ponieważ przy x^2 współczynnik jest dodatni, więc parabola ramiona ma skierowane do góry



Z rysunku widać, że nierówność jest spełniona, gdy $x \in < 0; 9 >$

Zadanie 27.

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie

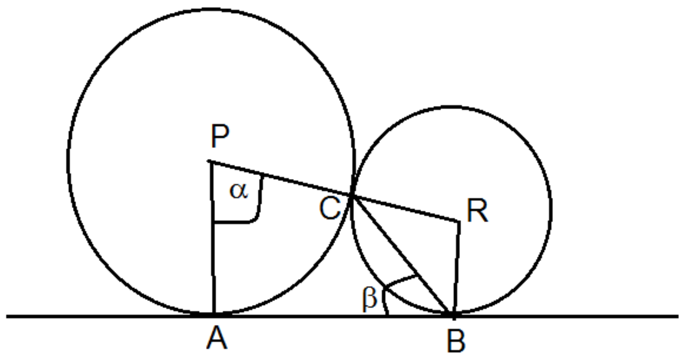
$4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020} = 4^{2017}(1 + 4 + 4^2 + 4^3) = 4^{2017}(1 + 4 + 16 + 64) = 4^{2017} \cdot 85$

$4^{2017} \cdot 85 = 4^{2017} \cdot 5 \cdot 17$

Ponieważ wyjściowa liczba dała się zapisać jako iloczyn, w którym występuje czynnik 17, więc jest podzielna przez 17.

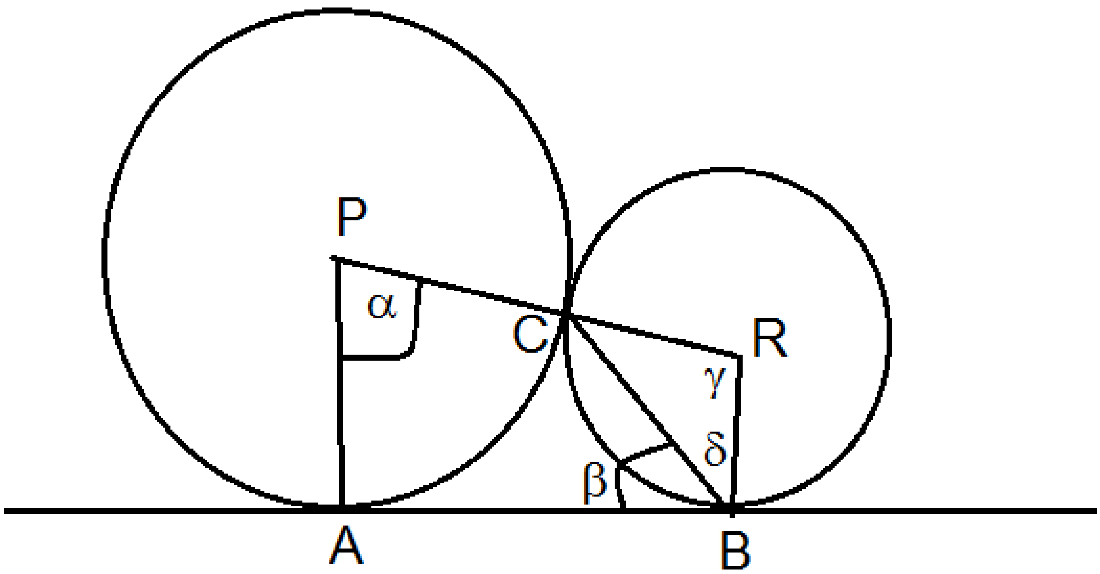
Zadanie 28.

Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R, styczne zewnętrznie w punkcie C. Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\angle APC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $\alpha = 180^o - 2\beta$.



Rozwiązanie:

Uzupełnijmy nasz rysunek o kąty ɣ i δ



Suma wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta musi wynosić 360°. Ponieważ promień okręgu łączący środek okręgu z punktem styczności z prostą tworzy z tą prostą kąt prosty, więc:

$$|\angle PAB| = |\angle ABR| = 90^{o}$$

Wynika z tego, że

$$\alpha + \gamma = 180^{o}$$

Czyli

$$\gamma = 180^{o} - \alpha$$

Ponieważ kąt ABR jest prosty więc

$\beta + \delta = 90^o$

Czyli

$\delta = 90^o - \beta$

Odcinki BR i CR to promienie tego samego okręgu, więc mają taką samą długość. Oznacza to, że trójkąt BCR jest równoramienny i $|\angle BCR| = \delta$

Suma kątów w trójkącie wynosi 180°, czyli

$\gamma + 2\delta = 180^o$

Wstawmy do ostatniego wzoru wyliczone kąty i otrzymamy

$180^o - \alpha + 2(90^o - \beta) = 180^o$

Po przekształceniach naszej równości otrzymamy

$180^o - \alpha + 180^o - 2\beta = 180^o$

$180^o - \alpha - 2\beta = 0$

$180^o - 2\beta = \alpha$

Zadanie 29.

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość współczynnika a

Rozwiązanie

Ponieważ kwadratowa funkcja f ma wartość największą, więc współczynnik a jest ujemny.

Ponieważ $f(0) = \frac{3}{2}$, więc współczynnik $c = \frac{3}{2}$.

Z symetryczności funkcji kwadratowej wynika, że $f(-3) = 6$

Możemy, więc utworzyć następujący układ równań

$$\begin{cases} a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + \frac{3}{2} = 6 \\ a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a - 3b + \frac{3}{2} = 6 \\ 36a - 6b + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18a - 6b + 3 = 12 \\ 36a - 6b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18a - 6b = 9 \\ 6a - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a - 2b = 3 \\ 6a - b = 0 \end{cases}$$

$-b = 3$

$b = -3$

$6a - (-3) = 0$

$6a + 3 = 0$

$6a = -3$

$a = -\frac{1}{2}$

Odpowiedź

$a = -\frac{1}{2}$

Zadanie 30.

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm, a jedna z przyprostokątnych jest o 14 cm dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie

Jeżeli jedna przyprostokątna, to x, to druga przyprostokątna będzie x-14.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy

$x^2 + (x - 14)^2 = 26^2$

$x^2 + x^2 - 28x + 196 = 676$

$2x^2 - 28x - 480 = 0$

$x^2 - 14x - 240 = 0$

$\Delta = 196 + 960 = 1156$

$\sqrt{\Delta} = 34$

$x_1 = \frac{14 - 34}{2} = -10$

$x_2 = \frac{14 + 34}{2} = 24$

Ponieważ długość boku musi być liczbą dodatnią więc x_1 nie spełnia tego warunku.

Jedna przyprostokątna ma 24 cm, druga przyprostokątna ma $24\ cm - 14\ cm = 10$ cm

Obwód tego trójkąta wynosi $26\ cm + 24\ cm + 10\ cm = 60\ cm$

Odpowiedź:

Odwód naszego trójkąta wynosi 60 cm

Zadanie 31.

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$

Rozwiązanie

Z warunków zadania mamy

$8 + 8 + r + 8 + 2r = 33$

$24 + 3r = 33$

$3r = 9$

$r = 3$

Ponieważ wyraz a_{16} różni się od wyrazu a_{13} o 3 r, więc $a_{16} - a_{13} = 9$

Odpowiedź:

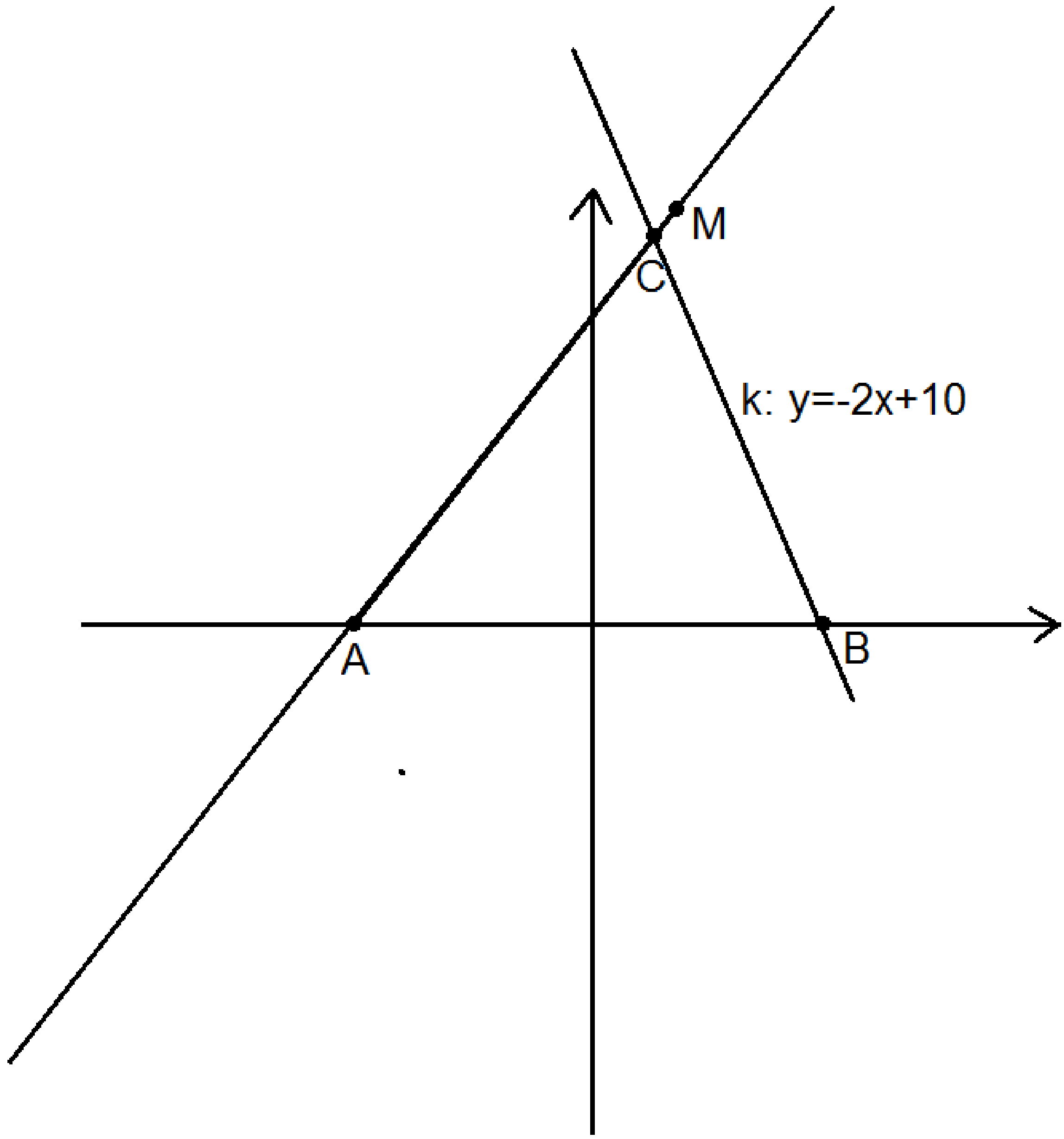
$a_{16} - a_{13} = 9$

Zadanie 32.

Dane są punkty $A = (-4; 0)$ i $M = (2; 9)$, oraz prosta k o równaniu $y = -2x + 10$. Wierzchołek B trójkąta ABC, to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Zacznijmy od pomocniczego rysunku



Wyznaczmy współrzędne wierzchołków3 trójkąta.

Wierzchołek B wyznaczymy z równania

$-2x + 10 = 0$

$2x = 10$

$x = 5$

$B = (5; 0)$

Znajdźmy równanie prostej AM.

W tym celu rozwiążmy układ równań

$$\begin{cases} -4a + b = 0 \\ 2a + b = 9 \end{cases}$$

$$6a = 9$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$3 + b = 9$$

$$b = 6$$

Prostą AM opisuje równanie $y = \frac{3}{2}x + 6$

Poszukajmy współrzędnych wierzchołka C

Wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = \frac{3}{2}x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 2x = 10 \\ 2y - 3x = 12 \end{cases}$$

$$7x = 8$$

$$x = \frac{8}{7}$$

$$y + \frac{16}{7} = 10$$

$$y = 7\frac{4}{7}$$

Czyli

$$C = \left(1\frac{1}{7}; 7\frac{4}{7}\right)$$

Wyznaczmy długość podstawy AB trójkąta ABC

Z rysunku widać, że |AB|=9

Wysokość trójkąta jest równa drugiej współrzędnej punktu C czyli $7\frac{4}{7}$

Obliczamy pole trójkąta ABC

$$P = \frac{ah}{2} = \frac{9 \cdot 7\frac{4}{7}}{2} = \frac{63\frac{36}{7}}{2} = \frac{68\frac{1}{7}}{2} = 34\frac{1}{14}$$

Odpowiedź

Pole trójkąta ABC wynosi $34\frac{1}{14}$

Zadanie 33.

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie

Wszystkich liczb dwucyfrowych jest 90

Liczb dwucyfrowych mniejszych od 40 i podzielnych przez 3 jest 10

W takim razie

$$P = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

Odpowiedź

Prawdopodobieństwo wylosowania z pośród wszystkich liczb dwucyfrowych, takiej, która będzie mniejsza od 40 i podzielna przez 3 wynosi $\frac{1}{9}$

Zadanie 34

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadłej do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

W podstawie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego znajduje się trójkąt równoboczny, czyli wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami.

Ponieważ pole powierzchni bocznej wynosi $\frac{15\sqrt{3}}{4}$, to pole jednej ściany bocznej wynosi $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

Mamy więc

$$P = \frac{ah}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}}{2}$$

$$a = 2$$

Pole podstawy

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

Długość krawędzi bocznej obliczymy z twierdzenia Pitagorasa

$$b^2 = 1^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2$$

$$b^2 = 1 + \frac{75}{16} = \frac{91}{16}$$

$$b = \frac{\sqrt{91}}{4}$$

Liczymy długość wysokości podstawy

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Wysokość ostrosłupa wyliczymy z twierdzenia Pitagorasa

$$H^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3}h_p\right)^2 = \frac{91}{16} - \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{91}{16} - \frac{4}{3} = 5\frac{11}{16} - 1\frac{1}{3} = 4\frac{33}{48} - \frac{16}{48} = 4\frac{17}{48} = \frac{209}{48}$$

$$H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{627}}{12}$$

Objętość

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{627}}{12} = \frac{\sqrt{209}}{12}$$

Odpowiedź

Objętość ostrosłupa wynosi $V = \frac{\sqrt{209}}{12}$