Matematyka rozszerzona – matura 2017

Zadanie 1

Liczba $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$ jest równa

A. 2 B. 4 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

Rozwiązanie

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=|2-\sqrt{3}|-2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+|2+\sqrt{3}|=$$

$$2-\sqrt{3}-2\sqrt{4-3}+2+\sqrt{3}=4-2\sqrt{1}=4-2=2$$

Odpowiedź A.

Zadanie 2.

Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem $a_n=\frac{(n^2-10)(2-3n)}{2n^3+n^2+3}$ dla $n\geq 1$. Wtedy

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$ B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ D. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\frac{3}{2}$

Rozwiązanie

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-10)(2-3n)}{2n^3+n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n^3-20+30n}{2n^3+n^2+3}$$

Podzielmy wszystkie wyrazy licznika i mianownika przez n^3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n^3-20+30n}{2n^3+n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^3}-\frac{3n^3}{n^3}-\frac{20}{n^3}+\frac{30n}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}+\frac{3}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-3-\frac{20}{n^3}+\frac{30}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}$$

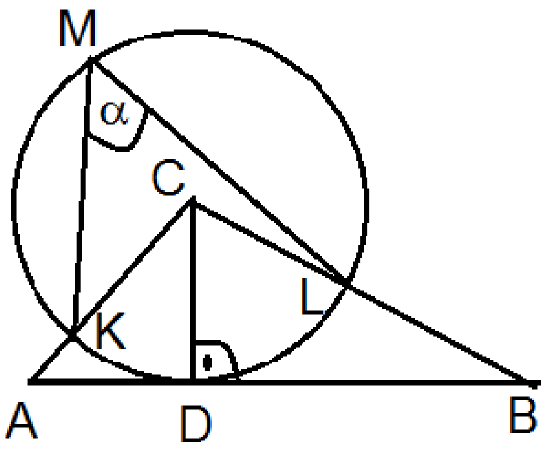
W ostatniej granicy wszystkie składniki sumy, prócz -3 dążą do zera. Podobnie w mianowniku wszystkie wyrazy sumy prócz 2 dążą do zera. W takim razie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-3-\frac{20}{n^3}+\frac{30}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}=-\frac{3}{2}$$

Odpowiedź D.

Zadanie 3.

Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC, w którym $|AD| = |CD| = \frac{1}{2}|BC|$ (zobacz rysunek). Okrąg ośrodku C i promieniu CD Jest styczny do prostej AB. Okrąg ten przecina boki AC i BC trójkąta odpowiednio w punktach K i L.



Zaznaczony na rysunku kąt α wpisany w okrąg jest równy

A. $37{,}5^o$ B. 45^o C. $52{,}5^o$ D. 60^o

Rozwiązanie

Kąt wpisany α oparty jest na tym samym łuku co kąt środkowy KCL, wiec jego rozwartość jest połową rozwartości kąta KCL. $\sphericalangle\alpha = \frac{1}{2}|\sphericalangle KCL| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle DCL|)$. Z warunków zadania wynika, że trójkąt ADC jest prostokątny i równoramienny, więc $|\sphericalangle ACD| = 45^o$. Z warunków zadania wynika też, że trójkąt CDB jest połową trójkąta równobocznego, więc $|\sphericalangle DCB| = 60^o$. W takim razie, $|\sphericalangle KCL| = 105^o$, a $|\sphericalangle\alpha| = 52{,}5^o$.

Odpowiedź C.

Zadanie 4.

Dane są punkt $B = (-4; 7)$ i wektor $\vec{u} = [-3; 5]$. Punkt A, taki, że $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$, ma współrzędne

A. $A = (5;\ -8)$ B. $A = (-13;\ 22)$ C. $A = (9;\ -15)$ D. $A = (12;\ 24)$

Rozwiązanie

$$-3\vec{u} = -3[-3; 5] = [9;\ -15]$$

A. $\overrightarrow{AB} = [-4 - 5; 7 - (-8)] = [-9; 15]$

B. $\overrightarrow{AB} = [-4 - (-13); 7 - 22] = [9; -15]$

Odpowiedź B.

Zadanie 5.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + ax + \frac{3}{4}$ przez dwumian $x - 2$ jest równa 1. Oblicz wartość współczynnika a. W poniższe kratki wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

$$x^3 - 2x^2 + ax + \frac{3}{4} : x - 2 = x^2 + \frac{1}{8}$$

$$-x^3 + 2x^2$$

$$= \quad = \quad ax + \frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$$

$$= \quad 1$$

Czyli $a = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Odpowiedź

1; 2; 5

Zadanie 6.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie P=(1; 0).

Rozwiązanie

Styczna ma postać $y = ax + b$. Aby wyznaczyć współczynnik kierunkowy a równania obliczymy wpierw pochodną funkcji f(x).

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (x^2+1) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 1 - 2x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$a = f'^{(1)} = \frac{-3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{(1^2+1)^2} = \frac{-3+2-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Pozostał współczynnik b. Wyznaczymy go z równania $y = ax + b$, kładąc za x=1 i y=0, otrzymujemy

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Odpowiedź

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Zadanie 7.

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$

Rozwiązanie

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 = 2x^2 + 2y^2 - 8xy + x^2y^2 + 4 =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 4xy + x^2y^2 + 4 = 2(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2y^2 - 4xy + 4) =$$

$$= 2(x-y)^2 + (xy-2)^2 > 0$$

Ponieważ kwadraty są większe od 0, gdy tylko $x \neq y$

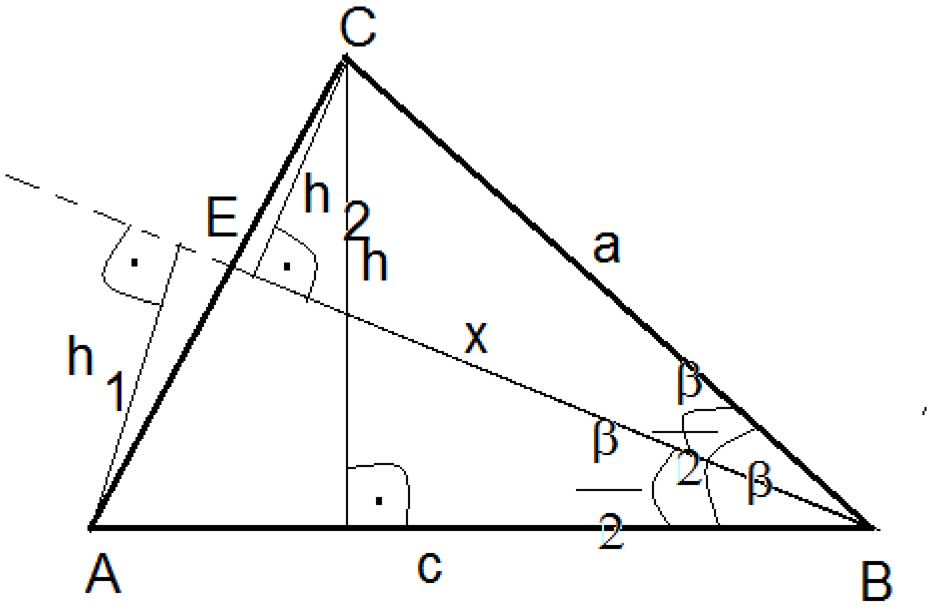
Zadanie 8.

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\measuredangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E. Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

Rozwiązanie

Zacznijmy od rysunku

Pole trójkąta ABC można obliczyć na dwa sposoby.



Sposób 1. $P = \frac{1}{2}ch$, ale $h = a\sin\beta$, więc $P = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

Sposób 2. Pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów AEB i BCE. Licząc pola tych trójkątów za podstawę uznamy bok BE o długości x

$P_{ABE} = \frac{1}{2}xh_1$, ale $h_1 = c\sin\frac{\beta}{2}$, więc $P_{ABE} = \frac{1}{2}xc\sin\frac{\beta}{2}$.

$P_{CBE} = \frac{1}{2}xh_2$, ale $h_2 = a\sin\frac{\beta}{2}$, więc $P_{CBE} = \frac{1}{2}xa\sin\frac{\beta}{2}$.

Tak więc

$$P = \frac{1}{2}xc\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}xa\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}x\sin\frac{\beta}{2}(a+c)$$

Porównajmy prawe strony wzorów na pola

$$\frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}x\sin\frac{\beta}{2}(a+c)$$

$$ac\sin\beta = x\sin\frac{\beta}{2}(a+c)$$

Otrzymany wzór przekształćmy tak, by wyznaczyć x

$$x = \frac{ac\sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}(a+c)}$$

Zastosujemy teraz wzór

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

I stosując podstawienie

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta$$

Otrzymamy

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

Wstawiając to do wzoru na x otrzymujemy

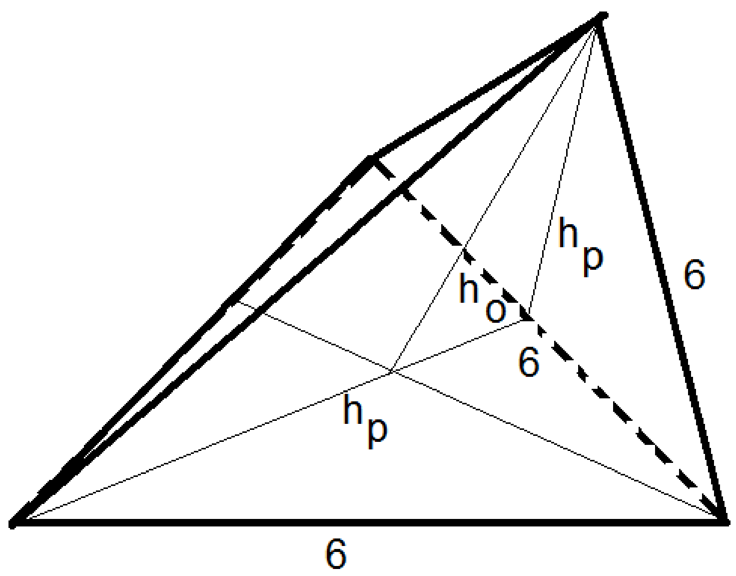
$$x = \frac{ac2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}(a+c)} = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$$

Zadanie 9.

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma na dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π.

Rozwiązanie

Narysujmy sobie czworościan

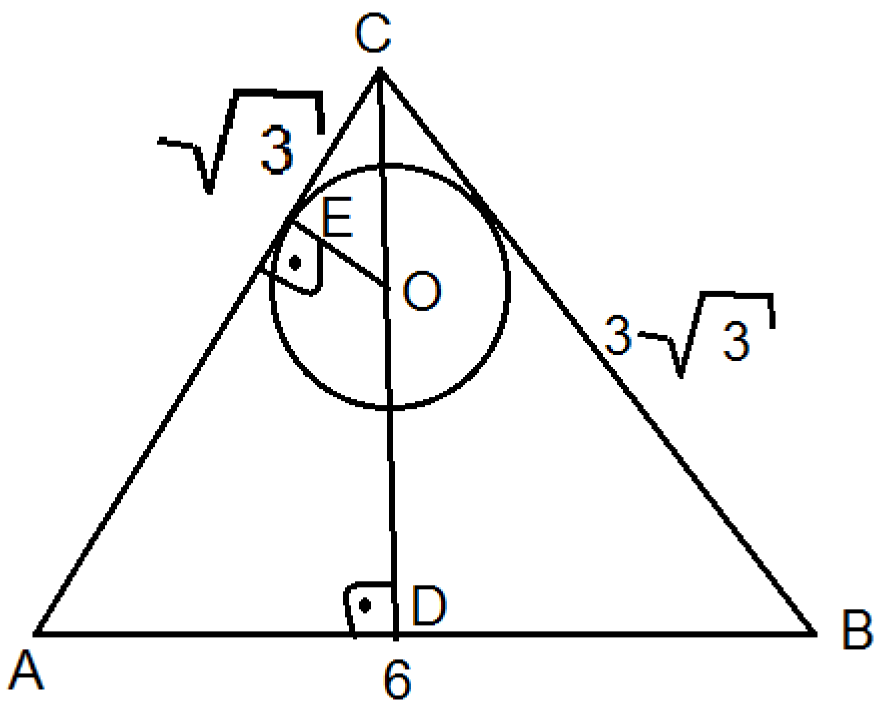


Wyznaczmy wysokość ostrosłupa. Ponieważ wysokość ściany bocznej $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ więc $h_o^2 = h_p^2 - \left(\frac{1}{3}h_p\right)^2 = 27 - 3 = 24$

$$h_o = 2\sqrt{6}$$

Ponieważ płaszczyzna π odcina z czworościanu czworościan o objętości $\frac{8}{27}$ razy mniejszej, więc te dwa czworościany są do siebie podobne w skali $\frac{2}{3}$. Wysokość tego mniejszego czworościanu $h = h_o \cdot \frac{2}{3} = 2\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$. Oznacza to, że płaszczyzna rozcina czworokąt na wysokości $x = 2\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Jeżeli kula została wpisana w ten czworościan, to jej środek znajduje się na wysokości a jej sfera styka się ze wszystkimi ścianami tego czworościanu w punkcie przecięcia się wszystkich trzech wysokości każdej ściany. Trzeba wyznaczyć długość promienia tej kuli. W tym celu dokonajmy przekroju czworościanu wraz z kulą, tak by płaszczyzna przekroju przechodziła przez wysokość podstawy, wysokość jednej ściany bocznej i jedną krawędź podstawy. Płaszczyzna ta podzieli kulę w środku na dwie równe części. Popatrz na rysunek.



Wyznaczmy długość odcinka CD

$$|CD|^2 = |BC|^2 - |DB|^2$$

$$|CD|^2 = 27 - 9 = 18$$

$$|CD| = 3\sqrt{2}$$

Z podobieństwa trójkątów ADC i EOC mamy

$$\frac{|CO|}{|CA|} = \frac{|EO|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|CD|}$$

$$\frac{|EO|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|CD|}$$

$$\frac{|EO|}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$|EO| = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Odległość płaszczyzny π od środka okręgu wynosi $y = \frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{4}{6}\sqrt{6} - \frac{3}{6}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Odpowiedź

Środek kuli znajduje się $\frac{\sqrt{6}}{6}$ od płaszczyzny przekroju

Zadanie 10.

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$

Rozwiązanie

W rozwiązaniu korzystamy ze wzoru

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Zastosujmy podstawienie

$$\cos x = y$$

Otrzymujemy równanie

$$\cos 2x + 3\cos x = -2$$

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x = -2$$

$$2y^2 + 3y + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{4} = -1$$

$$y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \quad lub \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pi \quad lub \quad x = \frac{2}{3}\pi \quad lub \quad x = \frac{4}{3}\pi$$

Zadanie 11.

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

Rozwiązanie

Obliczmy zdarzenie przeciwne. Zajdzie ono wówczas, gdy iloczyn wylosowanych liczb nie będzie podzielny przez 4. Temu zdarzeniu sprzyjają dwa przypadki:

Przypadek 1. Wszystkie wylosowane liczby są nieparzyste. Wśród 8 liczb cztery są nie parzyste, więc prawdopodobieństwo wylosowania liczby nieparzystej w jednym losowaniu wynosi $\frac{1}{2}$. Ponieważ losujemy trzy razy ze zwracaniem, to prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane liczby są nieparzyste wynosi $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Ten przypadek zajdzie, gdy w dwóch losowaniach wylosujemy liczbę nieparzystą a w jednym liczbę podzielną przez 2 lecz niepodzielną przez 4, czyli 2 lub 6. Prawdopodobieństwo dwukrotnego wylosowania liczby nieparzystej w losowaniu ze zwracaniem wynosi $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Prawdopodobieństwo wylosowania w jednym losowaniu liczby 2 lub 6 wynosi $\frac{1}{4}$. Ponieważ kulę 2 lub 6 można wylosować albo za pierwszym razem, albo za drugim razem, albo za trzecim razem, więc prawdopodobieństwo zajścia przypadku 2 wynosi $3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

Prawdopodobieństwo wylosowania trzech liczb, których iloczyn nie jest podzielny przez 4 wynosi $\frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn wylosowanych trzech liczb jest podzielny przez 4 wynosi $1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$

Odpowiedź

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn wylosowanych trzech liczb jest podzielny przez 4 wynosi $\frac{11}{16}$.

Zadanie 12.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2 - 6mx + (2m+3)(m-3) = 0$$

Ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2, przy czym $x_1<x_2$, spełniające warunek

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$$

Rozwiązanie

Aby równanie kwadratowe miało dwa różne pierwiastki $\Delta > 0$

Sprawdźmy, dla jakich m jest spełniony ten warunek

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2m+3)(m-3) = 36m^2 - 16 \cdot (2m+3)(m-3) =$$

$$= 36m^2 - (32m+48)(m-3) = 36m^2 - (32m^2 - 96m + 48m - 144) =$$

$$= 36m^2 - (32m^2 - 48m - 144) = 36m^2 - 32m^2 + 48m + 144 = 4m^2 + 48m + 144 > 0$$

$$4m^2 + 48m + 144 > 0$$

$$m^2 + 12m + 36 > 0$$

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$

$$m = \frac{-12}{2} = -6$$

Wyjściowe równanie ma 2 różne rozwiązania dla $m \neq -6$

Zajmijmy się teraz warunkiem

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$$

$$(4(x_1 - x_2) - 1)(4(x_1 - x_2) + 1) < 0$$

$$16(x_1 - x_2)^2 - 1 < 0$$

$$16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 < 0$$

$$16((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2) - 1 < 0$$

$$16\left(\left(\frac{6m}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{(2m+3)(m-3)}{4}\right) - 1 < 0$$

$$16\left(\frac{9}{4}m^2 - (2m+3)(m-3)\right) - 1 < 0$$

$$36m^2 - 16(2m+3)(m-3) - 1 < 0$$

$$4m^2 + 48m + 143 < 0$$

$$\Delta = 2304 - 2288 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$m_1 = \frac{-48 - 4}{8} = \frac{-52}{8} = -6\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{-48 + 4}{8} = \frac{-44}{8} = -5\frac{1}{2}$$

Ostatecznie, uwzględniając, że $m \neq -6$, możemy powiedzieć, że warunek zadania jest spełniony, gdy

$$m \in \left(-6\frac{1}{2};\ -6\right) \cup \left(-6;\ -5\frac{1}{2}\right)$$

Odpowiedź

$$m \in \left(-6\frac{1}{2};\ -6\right) \cup \left(-6;\ -5\frac{1}{2}\right)$$

Zadanie 13.

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5; 3)\ i\ B = (0; 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$

Rozwiązanie

Skorzystamy z następującego równania okręgu

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + c = 0$$

Gdzie (a; b) – współrzędne środka okręgu.

Należy rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{cases} 25 + 10a + 9 - 6b + c = 0 \\ 36 - 12b + c = 0 \\ a - 3b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34 + 10a - 6b + c = 0 \\ 36 - 12b + c = 0 \\ a - 3b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a - 6b + c = -34 \\ -12b + c = -36 \\ a - 3b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a - 6b + c = -34 \\ -12b + c = -36 \\ a = 3b - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10(3b-1)-6b+c=-34 \\ -12b+c=-36 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30b-10-6b+c=-34 \\ -12b+c=-36 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24b+c=-24 \\ -12b+c=-36 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24b+c=-24 \\ c=12b-36 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24b+12b-36=-24 \\ c=12b-36 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36b=12 \\ c=12b-36 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\frac{1}{3} \\ c=12b-36 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\frac{1}{3} \\ c=-32 \\ a=0 \end{cases}$$

Odpowiedź

$$\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{2}{3}y-32=0}$$

Zadanie 14.

Liczby a; b; c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2; b; 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a; b; c

Rozwiązanie

Niech $b=x$; $a=x-r$; $c=x+r$

Wówczas

$$x-r+x+x+r=27$$

$$3x=27$$

$$x=9$$

Zachodzi warunek

$$\frac{a-2}{b}=\frac{b}{2c+1}$$

$$\frac{7-r}{9}=\frac{9}{19+2r}$$

$$133+14r-19r-2r^2=81$$

$$2r^2+5r-52=0$$

$$\Delta=25+416=441$$

$$\sqrt{\Delta}=21$$

$$r_1=\frac{-5-21}{4}=\frac{-26}{4}=-6\frac{1}{2}$$

$$r_2=\frac{-5+21}{4}=4$$

Odpowiedź

$(a;b;c)=\left(15\frac{1}{2};9;2\frac{1}{2}\right)\quad lub\quad (a;b;c)=(5;9;13)$

Zadanie 15.

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Rozwiązanie

$$P=2\pi r^2+2\pi rh$$

$$V=\pi r^2 h$$

Z pierwszego równania

$$h=\frac{P-2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V=\ \pi r^2\cdot\frac{P-2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V=\frac{Pr-2\pi r^3}{2}$$

$$V'=\frac{P-6\pi r^2}{2}$$

Przyrównajmy pochodną do 0

$$\frac{P-6\pi r^2}{2}=0$$

$$6\pi r^2-P=0$$

$$r^2-\frac{P}{6\pi}=0$$

$$\left(r-\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)\left(r+\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)=0$$

$$r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$$

Drugi przypadek odpada bo $r>0$

$$h=\frac{P-2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$h=\frac{P-2\pi\frac{P}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}$$

$$h=\frac{\frac{2}{3}P}{2\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}$$

$$h=\frac{\frac{2}{3}P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{\frac{P}{3}}=2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$$

$$V=\pi r^2h=\pi\frac{P}{6\pi}2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$$

$$V=\frac{1}{3}P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$$

Odpowiedź

$r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}, h=2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}; V=\frac{1}{3}P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$