Sięgnij po Fermata

a) Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p, że: $p|\underbrace{10101\ldots01}_{4p-1\ cyfr}$.

b) Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to: $p|\underbrace{111\ldots11}_{p\ jedynek}\underbrace{222\ldots22}_{p\ dwójek}-12$

c) Wykaż, że każda liczba naturalna niepodzielna przez 2 i przez 5 ma całkowitą wielokrotność, będącą liczbą jedynkową.

Rozwiązania:

a) $p\left|\underbrace{101\ldots01}_{4p-1}\Rightarrow p\right|11\cdot\underbrace{101\ldots01}_{4p-1}=\underbrace{111\ldots11}_{4p}\Rightarrow p|9\cdot\underbrace{111\ldots11}_{4p}=10^{4p}-1$.

$p|10000^p-10000=10^{4p}-10000$

(wniosek z małego twierdzenia Fermata).

Zatem $p|(10^{4p}-1)-(10^{4p}-10000)=9999=3^2\cdot 11\cdot 101$ (101 – liczba pierwsza). Wobec tego $p=3; lub\ p=11; lub\ p=101$.

b) Dla $p=2; p=3$ jest to oczywiste, Dla $p=3$ (cecha podzielności przez 3) – także. Załóżmy dalej, że $p>5$. Oznaczmy $L=\underbrace{11\ldots11}_{p-1}$. Na mocy zadania 1 mamy $p|L$. Zauważmy, że

$\underbrace{11\ldots11}_{p}\underbrace{22\ldots22}_{p}=10^p\cdot\underbrace{11\ldots11}_{p}+\underbrace{22\ldots22}_{p}=10^p(10L+1)+2(10L+1)=$

$=L\cdot(10^{p+1}+20)+10^p+2$.

Zatem $\underbrace{11\ldots11}_{p}\underbrace{22\ldots22}_{p}-12=L\cdot(10^{p+1}+20)+(10^p-10)$.

Mamy tu sumę dwóch liczb podzielnych przez p, gdyż $p|L$ oraz $p|10^p-10$ (wniosek z małego twierdzenia Fermata)

c) Wystarczy dowieść, że dla każdej liczby całkowitej q nie podzielnej przez 2 ani przez 5 istnieje taka liczba r, że spełniony jest warunek:

$$q \mid \underbrace{111\ldots11}_{r\ jedynek}$$

Gdy *q* jest liczbą pierwszą wystarczy przyjąć:

$$r = 3\ dla\ q = 3$$

$$r = q - 1\ dla\ q > 5$$

Gdy *q* jest liczbą złożoną można je zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Dla przykładu, gdy

$$q = p \cdot s\ gdzie\ p\ i\ s\ liczby\ pierwsze\ różne\ od\ 2; 3\ i\ 5$$

$$r = (p-1)(s-1)$$

inne rozwiązanie:

Niech $m \in N^{+}$ i $2 \nmid m$ i $5 \nmid m$. Rozważmy liczby:

1; 11; 111, …; $\underbrace{111\ldots11}_{m+1\ cyfr}$.

Ponieważ mamy $m+1$ liczb naturalnych, to pewne dwie spośród tych liczb dają przy dzieleniu przez *m* tę samą resztę. Niech będą to liczby

$\underbrace{111\ldots111}_{i\ cyfr}$ oraz $\underbrace{111\ldots1111}_{j\ cyfr}$ $\left(1 \le i < j \le m+1\right)$

Skoro powyższe liczby dają przy dzieleniu przez *m* tę samą resztę, to różnica tych liczb jest podzielna przez *m* . Tak więc

$$m \mid \underbrace{111\ldots1111}_{j\ cyfr} - \underbrace{111\ldots111}_{i\ cyfr} = \underbrace{111\ldots1}_{j-i\ cyfr}\underbrace{00\ldots0}_{i\ cyfr} = \underbrace{111\ldots1}_{j-i\ cyfr} \cdot 10^{i}$$

Skoro *NWD(m; 10) = 1* (bo $2 \nmid m$ i $5 \nmid m$), to $m \mid \underbrace{111\ldots1111}_{j-i\ cyfr}$. Zatem, liczba $\underbrace{111\ldots11}_{j-i\ cyfr}$ jest poszukiwaną jedynkową całkowitą wielokrotnością liczby *m*.