Niełatwe równania

Spróbuj rozwiązać następujące równania trzeciego stopnia.

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

b) $3x^3 - 9x^2 + 9x - 27 = 0$

c) $3x^3 - 19x^2 + 90x = 0$

d) $x^3 - 15x - 4 = 0$

Rozwiązanie

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

Doprowadzamy do postaci kanonicznej stosując podstawienie:

$x = y + 2$

$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 12(y+2) - 8 = 0$

$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6(y^2 + 4y + 4) + 12y + 24 - 8 = 0$

$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 12y + 24 - 8 = 0$

$y^3 = 0$

Czyli $y = 0$, więc $x = 2$

Ponieważ

$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Jest to jedyne rozwiązanie tego równania

b) $3x^3 - 9x^2 + 9x - 27 = 0$

Podzielmy obie strony równania przez 3

$x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0$

Doprowadźmy do postaci kanonicznej stosując podstawienie

$x = y + 1$

$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3(y+1) - 9 = 0$

$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3(y^2 + 2y + 1) + 3y + 3 - 9 = 0$

$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 3y + 3 - 9 = 0$

$y^3 - 8 = 0$

Rozwiązaniem tego równania jest $y = 2$, więc $x = 3$

$(x^3 - 3x^2 + 3x - 9):(x-3) = x^2 + 3$

$-x^3 + 3x^2$

$\overline{= \quad =} \quad 3x - 9$

$\underline{-3x + 9}$

$= \quad =$

Ponieważ równanie

$x^2 + 3 = 0$

Nie ma rozwiązania, więc $x = 3$ jest jedynym rozwiązaniem tego równania

c) $3x^3 - 19x^2 + 90x = 0$

Wyłączmy przed nawias x

$x(3x^2 - 19x + 90) = 0$

Jak widać jednym z rozwiązań tego równania jest $x = 0$

Rozwiążmy jeszcze równanie kwadratowe

$3x^2 - 19x + 90 = 0$

$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 3 \cdot 90 = 361 - 1080 = -719$

Ponieważ delta jest ujemna, to $x = 0$ jest jedynym rozwiązaniem tego równania

d) $x^3 - 15x - 4 = 0$

Korzystamy ze wzorów wyprowadzonych w artykule „Trzeci stopień”

$B^3 = x^3 + A^3 + 3ABx \; oraz \; x = B - A$

Mamy więc

$B^3 - A^3 = x^3 + 3ABx$

Czyli

$B^3 - A^3 = x^3 - 15x = 4$

$AB = -5$

Więc

$A^3B^3 = -125$

Po podstawieniu

$A^3 = u \quad i \quad B^3 = v$

Otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} v - u = 4 \\ vu = -125 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 4 + u \\ u(4 + u) = -125 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 4 + u \\ u^2 + 4u = -125 \end{cases}$$

Ponieważ $(u + 2)^2 = u^2 + 4u + 4$ to równanie $u^2 + 4u = -125$ możemy zapisać

$$(u + 2)^2 - 4 = -125$$

Tak więc

$$(u + 2)^2 = -121$$

Czyli

$$u + 2 = \sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$$

$$u = 11\sqrt{-1} - 2$$

$$v = 4 + 11\sqrt{-1} - 2 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$A^3 = 11\sqrt{-1} - 2$$

$$A = \sqrt[3]{11\sqrt{-1} - 2}$$

$$B^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$B = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{11\sqrt{-1} - 2}$$

Niech teraz

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1}$$

Wtedy

$$2 + 11\sqrt{-1} = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 2 \\ 3a^2b - b^3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a^2-3b^2)=2 \\ b(3a^2-b^2)=11 \end{cases}$$

Łatwo można zauważyć, że oba równania układu są spełnione dla $a=2$ i $b=1$

Tak więc

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$$

Na podstawie identycznego rozumowania mamy, że

$$\sqrt[3]{11\sqrt{-1}-2}=-2+\sqrt{-1}$$

$$y=2+\sqrt{-1}-\left(\sqrt{-1}-2\right)=2+\sqrt{-1}-\sqrt{-1}+2=4$$

Czyli jednym z pierwiastków naszego równania jest $x=4$

Sprawdźmy, czy nasze równanie ma jeszcze jakieś pierwiastki

$$(x^3-15x-4):(x-4)=x^2+4x+1$$

$$-x^3+4x^2$$

$$4x^2-15x$$

$$-4x^2+16x$$

$$x-4$$

$$-x+4$$

$$= \quad =$$

$$x^2+4x+1=0$$

$$\Delta=16-4=12$$

$$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$$

$$x_1=\frac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$$

$$x_2=-2+\sqrt{3}$$

Tak więc równanie ma trzy różne pierwiastki

$$x=4; x=-2-\sqrt{3}\ i\ x=-2+\sqrt{3}$$