Czworokąty

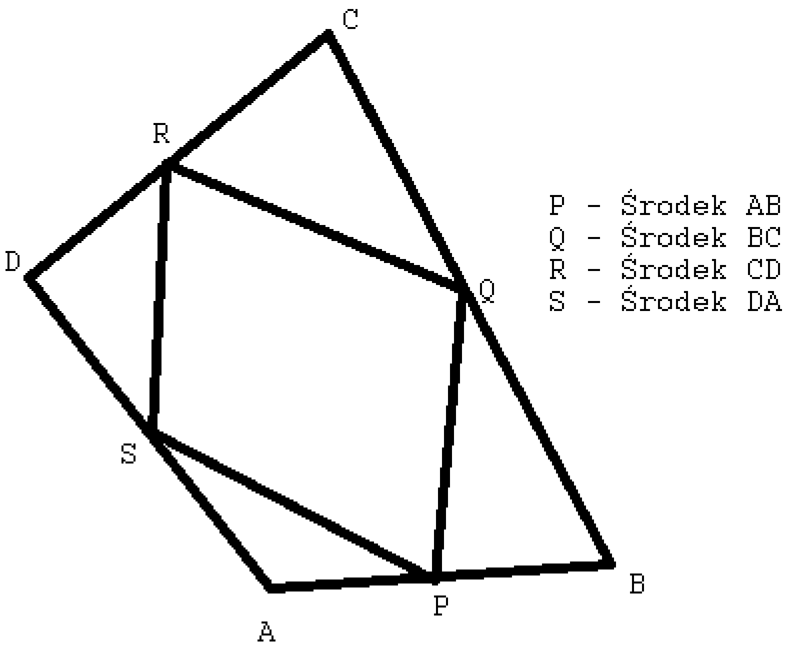
Odcinkami połączono środki kolejnych boków czworokąta wypukłego. Wykaż, że te odcinki są bokami równoległoboku. Kiedy ten równoległobok jest:

a) prostokątem?

b) rombem?

c) kwadratem?

Rozwiązanie



Mamy $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$, czyli $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$; $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$. Analogicznie uzasadniamy, że $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$. Zatem $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Tak samo dowodzimy, że $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BD}$. Wobec tego$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$. Z równości $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ i $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ wynika, że czworokąt PQRS jest równoległobokiem. Łatwo zauważymy, że równoległobok PQRS jest:

a) $prostokątem \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow AC \perp BD$

b) $rombem \Leftrightarrow |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| \Leftrightarrow AC = BD$

c) $kwadratem \Leftrightarrow AC \perp BD$ i $AC = BD$.