Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Trudne działania

Zadanie 1. Liczby $x_1;\ x_2;\ x_3$ są pierwiastkami wielomianu $x^3 - 2x + 2$. Oblicz $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Rozwiązanie:

Mamy wzory Vie'te'a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$$

Stąd

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0^2$$

Czyli

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 = 0$$

A więc

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot (-2) = 0$$

Czyli

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$$

Stąd

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 4^2$$

Czyli

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2 = 16$$

Z drugiego wzoru Vie'te'a mamy:

$$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 = (-2)^2$$

Czyli

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2(x_1x_2)(x_2x_3) + 2(x_2x_3)(x_3x_1) + 2(x_3x_1)(x_1x_2) = 4$$

A więc

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 4$$

Czyli

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1x_2x_3 \cdot 0 = 4$$

Skąd

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = 4$$

Z $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2 = 16$ i $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = 4$ wynika, że

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2 \cdot 4 = 16$$

Skąd

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8$$

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli wielomian $x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki, to $p \leq 0$.

Rozwiązanie:

Mamy wzory Vie'te'a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p \\ x_1x_2x_3 = -q \end{cases}$$

Stąd

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0^2$$

Czyli

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 = 0$$

A więc

$$x_1^2 + x_2^2 + 3_3^2 + 2p = 0$$

Skąd

$$p = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 0$$