Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Okrąg wpisany

Zadanie 1. Wykaż, że dla trójkąta o bokach a; b; c; do którego wpisano okrąg o promieniu r prawdziwa jest nierówność:

$$r \leq \frac{\sqrt{3}}{18}(a+b+c)$$

Rozwiązanie:

Ponieważ w artykule „Geometria na okrągło udowodniliśmy, że

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

Więc poszukiwany wzór ma postać:

$$\frac{2P}{a+b+c} \leq \frac{\sqrt{3}}{18}(a+b+c)$$

Czyli

$$P \leq \frac{\sqrt{3}}{18}(a+b+c)^2$$

Jak wiadomo: spośród trójkątów o danym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny, czyli

$$P \leq \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{36}L^2$$

Gdzie zastosowaliśmy wzór na pole trójkąta równobocznego o boku $\frac{L}{3}$. Ponieważ $L = a + b + c$, to dowodzi nierówność:

$$P \leq \frac{\sqrt{3}}{18}(a+b+c)^2$$

Zadanie 2. Wykaż, że dla trójkąta o bokach a; b; c; do którego wpisano okrąg o promieniu r, zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{4r^2}$$

Rozwiązanie:

Zastosujmy wzór Herona $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p=\frac{a+b+c}{2}$. Mamy

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{a^2-(b-c)^2}+\frac{1}{b^2-(c-a)^2}+\frac{1}{c^2-(a-b)^2}=$$

$$=\frac{1}{(a-b+c)(a+b-c)}+\frac{1}{(b-c+a)(b+c-a)}+\frac{1}{(c-a+b)(c+a-b)}=$$

$$=\frac{1}{(2p-2b)(2p-2c)}+\frac{1}{(2p-2c)(2p-2a)}+\frac{1}{(2p-2a)(2p-2b)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-c)(p-b)}=\frac{p}{4(p-a)(p-c)(p-b)}=\frac{p^2}{4p(p-a)(p-c)(p-b)}$$

$$=\frac{p^2}{4P^2}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2P}\right)^2=\frac{1}{4r^2}$$