

Suma sześciątów kwadratem

Zadanie

Znajdź przykład równości sumy sześciątów kolejnych liczb naturalnych z kwadratem liczby naturalnej. Czy wiesz jak to zrobić? Korzystając z zadania „Suma kolejnych sześciątów kwadratem” znajdź rozwiązania równania $5n^2 - 1 = (2b)^2$ i zapisz wynikające z tą równości $(a + 1)^3 + (a + 2)^3 + \dots + (a + n)^3 = (nb)^2$. Uwaga 1. Równanie $x^3 + (x + 1)^3 = y^2$ ma w liczbach naturalnych $x, y \geq 1$ tylko rozwiązanie $(x, y) = (1; 3)$. Uwaga 2. Równanie $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = y^2$ ma w liczbach naturalnych $x, y \geq 1$ dwa rozwiązania $(x, y) = (1; 6), (x, y) = (23; 204)$

Rozwiązanie

Równanie $5n^2 - 1 = (2b)^2$ spełnia para $(n; b) = (305; 341)$ Oznacza to, że $a = \frac{n-1}{2} = \frac{305-1}{2} = \frac{304}{2} = 152$. Suma będzie składała się z 305 wyrazów, oto on

$$\begin{aligned} &153^3 + 154^3 + 155^3 + 156^3 + 157^3 + 158^3 + 159^3 + 160^3 + 161^3 + 162^3 + 163^3 + \\ &+ 164^3 + 165^3 + 166^3 + 167^3 + 168^3 + 169^3 + 170^3 + 171^3 + 172^3 + 173^3 + 174^3 + \\ &+ 175^3 + 176^3 + 177^3 + 178^3 + 179^3 + 180^3 + 181^3 + 182^3 + 183^3 + 184^3 + 185^3 + \\ &+ 186^3 + 187^3 + 188^3 + 189^3 + 190^3 + 191^3 + 192^3 + 193^3 + 194^3 + 195^3 + 196^3 + \\ &+ 197^3 + 198^3 + 199^3 + 200^3 + 201^3 + 202^3 + 203^3 + 204^3 + 205^3 + 206^3 + 207^3 + \\ &+ 208^3 + 209^3 + 210^3 + 211^3 + 212^3 + 213^3 + 214^3 + 215^3 + 216^3 + 217^3 + 218^3 + \\ &+ 219^3 + 220^3 + 221^3 + 222^3 + 223^3 + 224^3 + 225^3 + 226^3 + 227^3 + 228^3 + 229^3 + \\ &+ 230^3 + 231^3 + 232^3 + 233^3 + 234^3 + 235^3 + 236^3 + 237^3 + 238^3 + 239^3 + 240^3 + \\ &+ 241^3 + 242^3 + 243^3 + 244^3 + 245^3 + 246^3 + 247^3 + 248^3 + 249^3 + 250^3 + 251^3 + \\ &+ 252^3 + 253^3 + 254^3 + 255^3 + 256^3 + 257^3 + 258^3 + 259^3 + 260^3 + 261^3 + 262^3 + \\ &+ 263^3 + 264^3 + 265^3 + 266^3 + 267^3 + 268^3 + 269^3 + 270^3 + 271^3 + 272^3 + 273^3 + \\ &+ 274^3 + 275^3 + 276^3 + 277^3 + 278^3 + 279^3 + 280^3 + 281^3 + 282^3 + 283^3 + 284^3 + \\ &+ 285^3 + 286^3 + 287^3 + 288^3 + 289^3 + 290^3 + 291^3 + 292^3 + 293^3 + 294^3 + 295^3 + \\ &+ 296^3 + 297^3 + 298^3 + 299^3 + 300^3 + 301^3 + 302^3 + 303^3 + 304^3 + 305^3 + 306^3 + \\ &+ 307^3 + 308^3 + 309^3 + 310^3 + 311^3 + 312^3 + 313^3 + 314^3 + 315^3 + 316^3 + 317^3 + \\ &+ 318^3 + 319^3 + 320^3 + 321^3 + 322^3 + 323^3 + 324^3 + 325^3 + 326^3 + 327^3 + 328^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+329^3 + 330^3 + 331^3 + 332^3 + 333^3 + 334^3 + 335^3 + 336^3 + 337^3 + 338^3 + 339^3 + \\
&+340^3 + 341^3 + 342^3 + 343^3 + 344^3 + 345^3 + 346^3 + 347^3 + 348^3 + 349^3 + 350^3 + \\
&+351^3 + 352^3 + 353^3 + 354^3 + 355^3 + 356^3 + 357^3 + 358^3 + 359^3 + 360^3 + 361^3 + \\
&+362^3 + 363^3 + 364^3 + 365^3 + 366^3 + 367^3 + 368^3 + 369^3 + 370^3 + 371^3 + 372^3 + \\
&+373^3 + 374^3 + 375^3 + 376^3 + 377^3 + 378^3 + 379^3 + 380^3 + 381^3 + 382^3 + 383^3 + \\
&+384^3 + 385^3 + 386^3 + 387^3 + 388^3 + 389^3 + 390^3 + 391^3 + 392^3 + 393^3 + 394^3 + \\
&+395^3 + 396^3 + 397^3 + 398^3 + 399^3 + 400^3 + 401^3 + 402^3 + 403^3 + 404^3 + 405^3 + \\
&+406^3 + 407^3 + 408^3 + 409^3 + 410^3 + 411^3 + 412^3 + 413^3 + 414^3 + 415^3 + 416^3 + \\
&+417^3 + 418^3 + 419^3 + 420^3 + 421^3 + 422^3 + 423^3 + 424^3 + 425^3 + 426^3 + 427^3 + \\
&+428^3 + 429^3 + 430^3 + 431^3 + 432^3 + 433^3 + 434^3 + 435^3 + 436^3 + 437^3 + 438^3 + \\
&+439^3 + 440^3 + 441^3 + 442^3 + 443^3 + 444^3 + 445^3 + 446^3 + 447^3 + 448^3 + 449^3 + \\
&+450^3 + 451^3 + 452^3 + 453^3 + 454^3 + 455^3 + 456^3 + 457^3 = 10817040025 = 104005^2 \\
&= (305 \cdot 341)^2
\end{aligned}$$