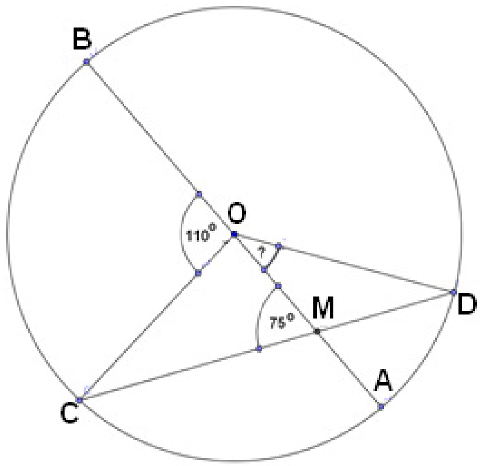
Rozwiązania zadań z numeru 36

Trudna geometria

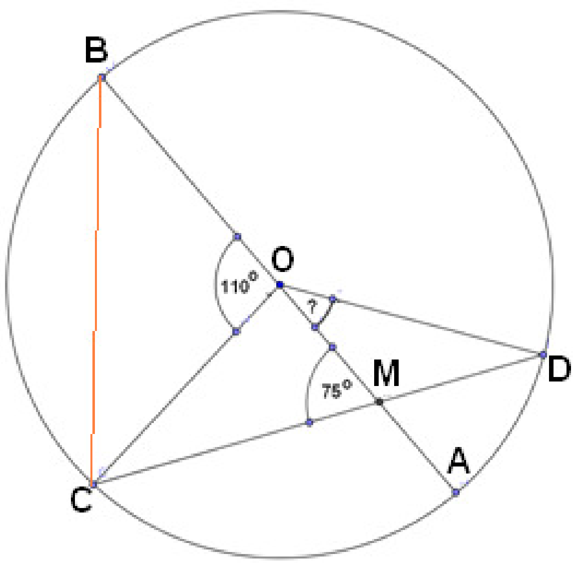
Zadanie 1. Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Średnica AB tego okręgu przecina pewną jego cięciwę CD w punkcie M. kąt CMB jest równy 75^o, a kąt środkowy tego okręgu oparty na łuku BC (tym, do którego nie należy punkt D), wynosi 110^o. czy potrafisz obliczyć kąt środkowy oparty na łuku AD (nie zawierającym punktu B)?

Rozwiązanie

Zacznijmy od rysunku



Uzupełnijmy rysunek o pomocniczy odcinek



Trójkąt BOC jest trójkątem równoramiennym, więc kąty przy wierzchołkach B i C mają taką samą rozwartość. Wyznaczmy marę kąta CBA

$$\angle CBA = \frac{1}{2}\left(180^o - \angle BOC\right) = \frac{1}{2}\left(180^o - 110^o\right) = \frac{1}{2}\cdot 70^o = 35^o$$

Kąt CBA jest kątem wpisanym, a kąt COA jest kątem środkowym i oba oparte są na tym samym łuku, więc Kąt COA ma dwa razy większą rozwartość niż kąt CBA. Wynika z tego, że kąt COA ma rozwartość 70^o.

Obliczmy teraz z trójkąta CMO rozwartość kąta OCM

$$\angle OCM = 180^o - (\angle CMO + \angle COA) = 180^o - \left(75^o + 70^o\right) = 180^o - 145^o = 35^o$$

Kąty: kąt CMO i kąt DMO są przystające, więc

$$\angle DMO = 180^o - \angle CMO = 180^o - 75^o = 105^o$$

Trójkąt CDO jest równoramienny więc kąty: kąt OCD i kąt CDO mają taką samą rozwartość, czyli kąt CDO ma 35^o.

Z trójkąta OMD obliczmy rozwartość szukanego kąta AOD.

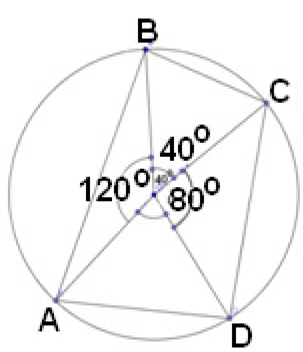
$$\angle AOD = 180^o - \left(\angle OMD + \angle MDO\right) = 180^o - \left(105^o + 35^o\right) = 180^o - 140^o = 40^o$$

Odpowiedź: Szukany kąt ma 40^o.

Zadanie 2. Na okręgu o środku O i promieniu r wybrane zostały cztery punkty: A; B; C i D, takie, że kąt środkowy tego okręgu oparty na łuku AB ma 120^o, kąt środkowy oparty na łuku BC ma 40^o i kąt środkowy oparty na łuku CD ma 80^o. Oblicz Kąty wewnętrzne czworokąta ABCD, kąty utworzone przez jego przekątne i kąty utworzone przez proste zawierające przeciwległe boki.

Rozwiązanie:

Zacznijmy, jak poprzednio od rysunku



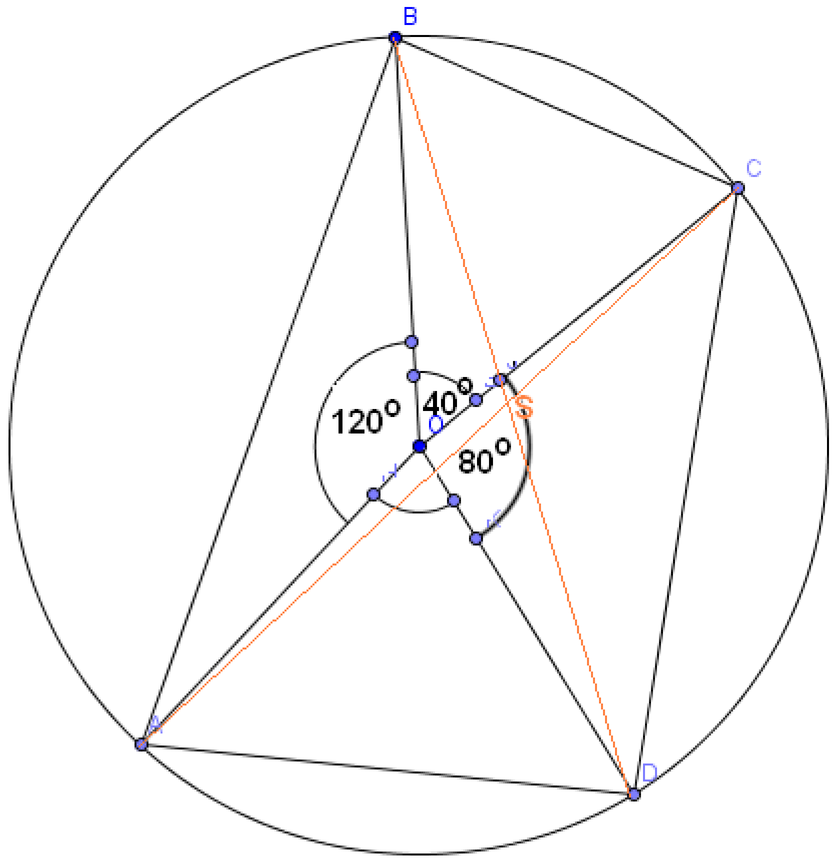
Obliczmy ostatni z czterech kątów środkowych

$$\angle AOD = 360^o - (\angle AOB + \angle BOC + \angle COD) = 360^o - (120^o + 40^o + 80^o) = 360^o - 240^o = 120^0$$

Obliczmy teraz kąty wewnętrzne czworokąta ABCD. Kąt BAD jest kątem wpisanym opartym na łuku, na którym jest oparty kąt środkowy BOD. Kąt BOD ma 120°, więc kąt BAD ma 60°.

Podobnie wyliczymy pozostałe kąty wewnętrzne czworokąta ABCD. Kąt ABC ma 100°; kąt BCD ma 120° i kąt CDA ma 80°.

Uzupełnijmy teraz nasz rysunek o przekątne czworokąta ABCD, aby obliczyć pod jakim kątem się one przecinają.



Zajmijmy się kątami trójkąta BSC.

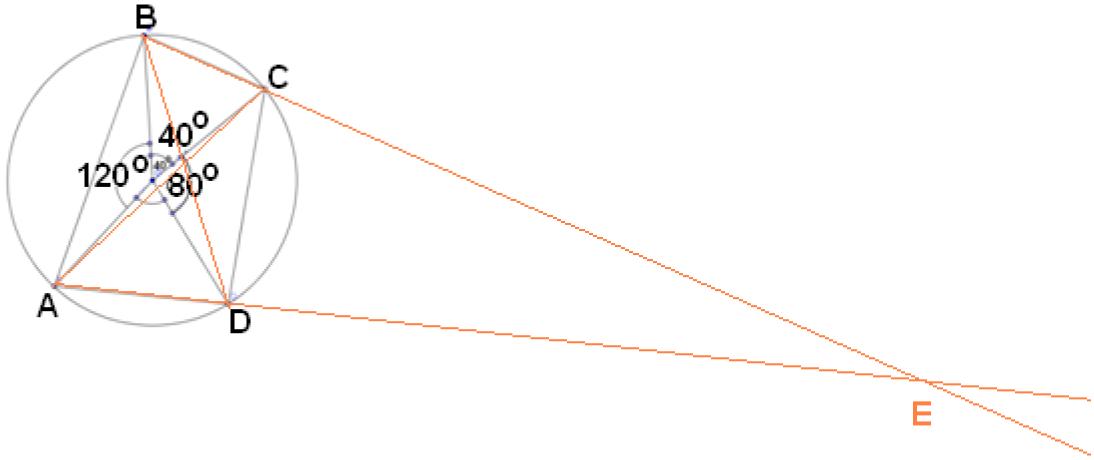
Kąt DBC jest kątem wpisanym, opartym na łuku CD. Na tym łuku oparty jest też kąt środkowy, który ma 80°. W takim razie kąt CBD ma 40°.

Podobnie możemy policzyć, że kąt ACB ma 60°.

Możemy teraz policzyć kąt BSC, czyli kąt pod którym przecinają się przekątne.

$$\angle BSC = 180^o - (\angle SBC + \angle SCB) = 180^o - (40^o + 60^o) = 180^o - 100^o = 80^o$$

Pozostało jeszcze policzyć kąt pod jakim przetną się przeciwległe boki czworokąta. Uzupełnijmy wpierw rysunek.



Skorzystamy, z trójkąta CDE. Kąty: kąt ADC i kąt CDE są przystające, więc kąt CDE ma 100°. Podobnie można obliczyć, że kąt DCE ma 60°. W takim razie szukany kąt CED ma 20°. Podobnie, możemy policzyć, że boki AB i CD po przedłużeniu przetną się pod kątem 40°.

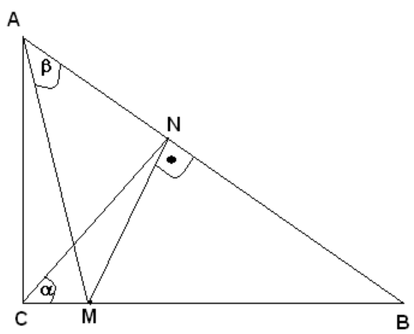
Odpowiedź:

Kąty wewnętrzne czworokąta mają: 60°; 100°; 120° i 80°. przekątne tego czworokąta przecinają się pod kątem 80°, a przeciwległe boki po przedłużeniu przecięły by się pod kątami: 20° i 40°.

Zadanie 3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na przyprostokątnej BC obrano punkt M taki, że nie jest on żadnym końcem tego boku. Punkt M połączono z przeciwprostokątną AB trójkąta ABC odcinkiem MN takim, że odcinek MN jest prostopadły do przeciwprostokątnej AB. Udowodnij, że kąt MAN ma taką samą rozwartość jak kąt MCN.

Rozwiązanie:

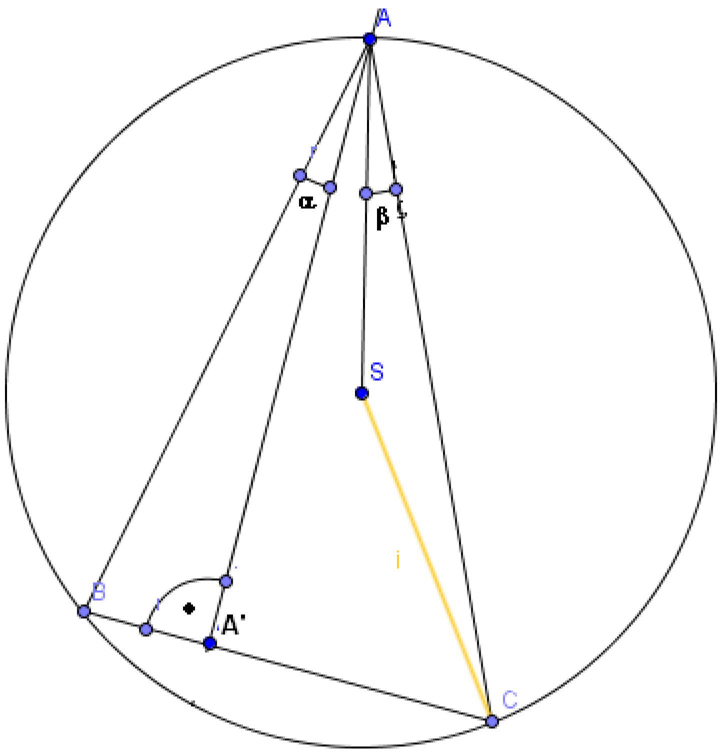
Zacznijmy od pomocniczego rysunku.



Zajmijmy się czworokątem ACMN. Ma on dwa kąty proste, są to kąty: kąt MCA i kąt ANM. Odcinek AM rozcina ten czworokąt na dwa trójkąty prostokątne: trójkąt ACM i trójkąt AMN. Na obydwóch trójkątach można opisać okrąg. Ponieważ są to trójkąty prostokątne, więc środek tych okręgów będzie leżał na środku odcinka AM, czyli tak naprawdę, będzie tylko jeden okrąg opisujący oba wymienione trójkąty prostokątne. Kąty α i β dla tego okręgu będą kątami wpisanymi i oba będą oparte na tym samym łuku, czyli kąty te mają tą samą rozwartość.

Zadanie 4. Niech AA' będzie wysokością trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt S środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że kąty: kąt BAA' i kąt SAC mają taką samą rozwartość.

Rozwiązanie:



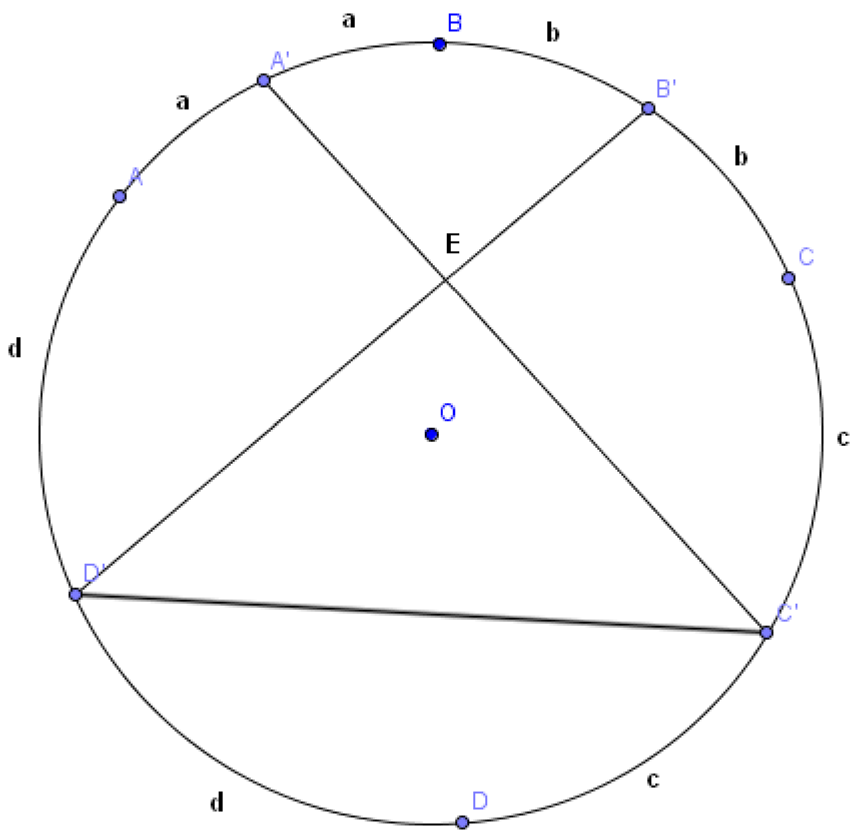
Załóżmy, że kąt ABA' ma miarę φ. Korzystając z trójkąta prostokątnego ABA' możemy stwierdzić, że $\alpha = 90^\circ - \varphi$. Kąt CSA jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany CBA więc jego rozwartość wynosi 2 φ. Wyznaczmy teraz z trójkąta ACS kąt β. Trójkąt ACS jest równoramienny więc ma dwa kąty o takiej samej rozwartości.

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 2\varphi) = 90^\circ - \varphi$$

Kąty α i β mają taką samą rozwartość.

Zadanie 5. Na okręgu o środku O i promieniu r obrano punkty: A; B; C; D. Następnie na tym kręgu wybrano jeszcze punkty: A'; B'; C' i D', w taki sposób, że |AA'|=|BA'|; |BB'|=|CB'|; |CC'|=|DC'| i |DD'|=|AD'|. Udowodnij, że proste A'C' i B'D' są do siebie prostopadłe.

Rozwiązanie:



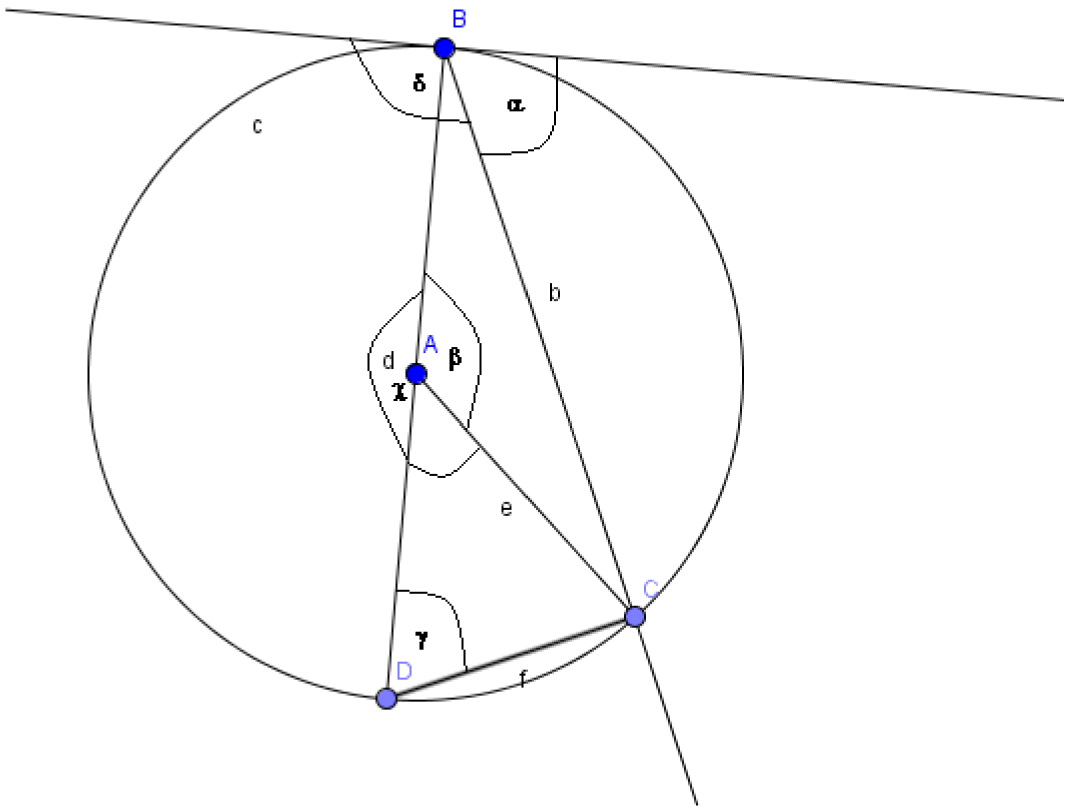
Zauważ, że wystarczy dowieść, że trójkąt C'D'E jest prostokątny. Kąt B'D'C' jest kątem wpisanym opartym na łuku o długości $b+c$. Kąt A'C'D' jest kątem wpisanym opartym na łuku o długości $a+d$. W takim razie kąt będący sumą kątów: kąt B'D'C' i kąt A'C'D' oparty byłby na łuku o długości $a+b+c+d$, czyli na półokręgu. Wynika z tego, że suma kątów : kąt B'D'C'+kąt A'C'D' daje kąt prosty. Ponieważ suma wszystkich kątów w trójkącie wnosi 180^o, więc kąt C'ED' jest kątem prostym.

Zadanie 6. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie M. Niech AB będzie cięciwą większego okręgu styczną jednocześnie do małego okręgu w punkcie T. Udowodnij, że półprosta MT jest dwusieczną kąta AMB.

Rozwiązanie:

Aby rozwiązać to zadanie udowodnimy wpierw następujący **lemat**: *Kąt między styczną a cięciwą okręgu, poprowadzoną z punktu styczności, jest równy połowie kąta środkowego, opartego na łuku zawartym między ramionami pierwszego kąta.*

Dowód lematu



Zauważmy, że jeśli kąt α jest kątem prostym, to wewnątrz kąta α znajduje się cały półokrąg na którym oparty jest kąt środkowy, który ma 180°, czyli dla tego przypadku lemat jest prawdziwy.

Gdy α jest kątem ostrym, to ma takie samo rozwarcie jak kąt γ, bo trójkąt BCD jest prostokątny o kącie prostym w wierzchołku C. w takim razie zachodzi następująca równość:

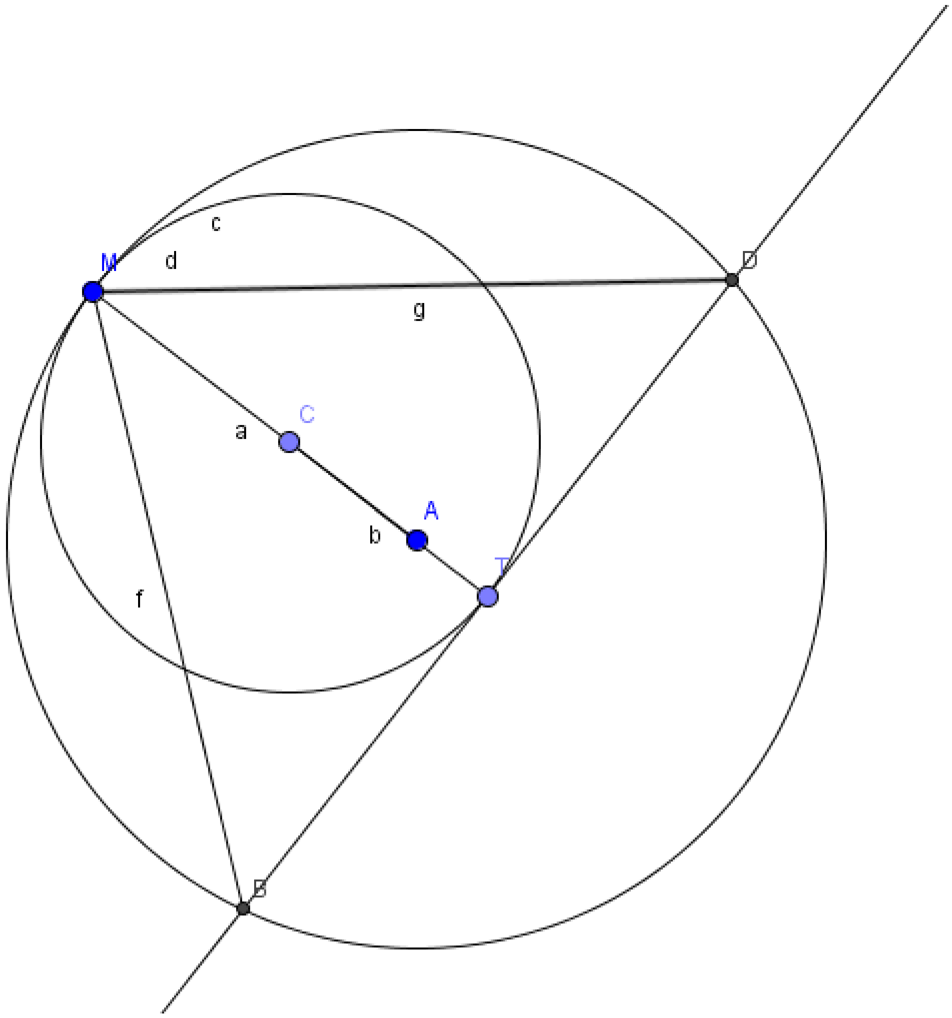
$$\angle\gamma + \angle CBD = \angle\alpha + \angle CBD = 90^o.$$

Po odjęciu kąta CBD mamy, że α=γ. Kąt γ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy β, więc jest jego połową. Wynika z tego, że dla kąta ostrego α nasz lemat też jest prawdziwy.

Kąt rozwarty δ jest równy $90^o + \angle CBD$. W jego wnętrzu znajduje się łuk na którym opiera się kąt wpisany $\chi = 180^o + \angle CAD$. Ponieważ, kąt 90° jest połową kata 180^0, a kąt CBD **jako** kąt wpisany jest połową kąta środkowego CAD (oba są oparte na tym samym łuku) więc δ jest połową kąta χ, co kończy dowód lematu.

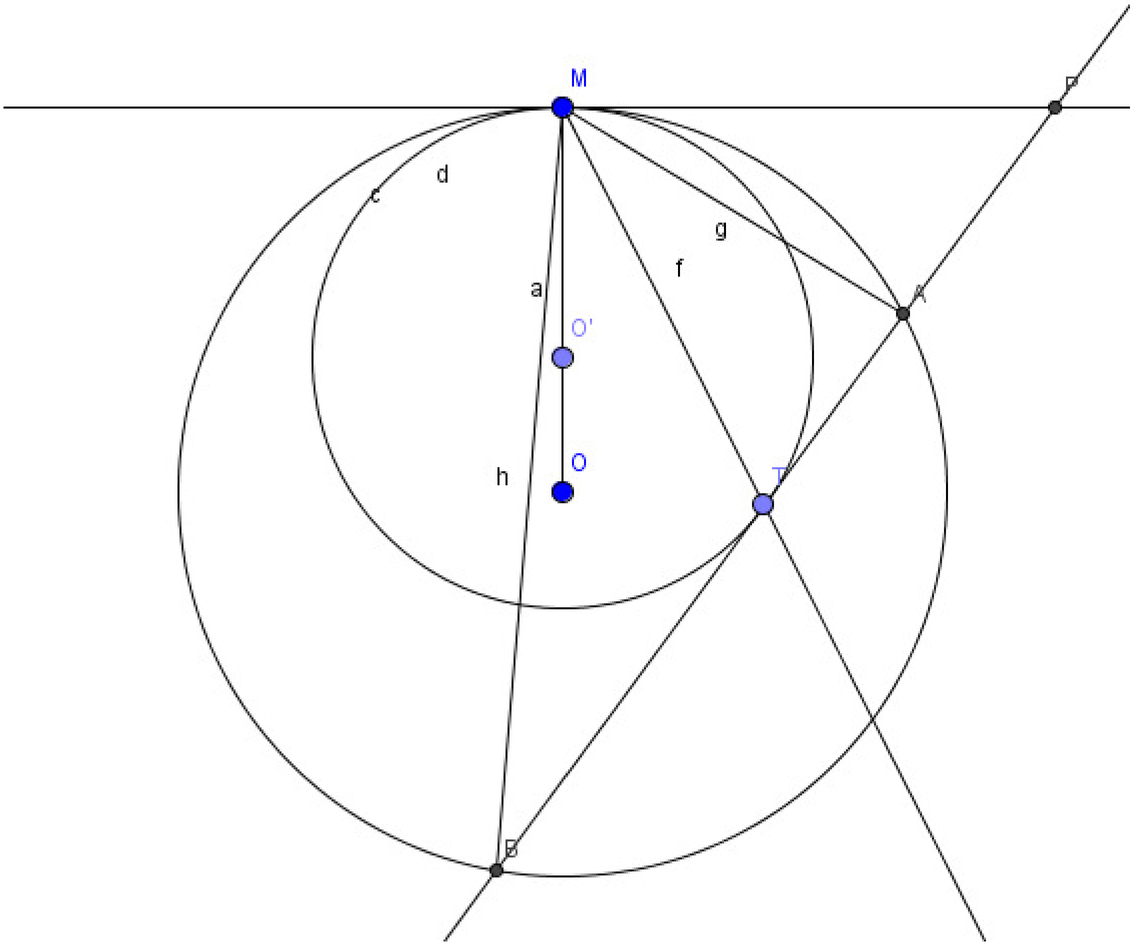
Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Przypadek pierwszy:



Trójkąt BDM jest trójkątem równoramiennym. Odcinek MT jest jego wysokością więc jest dwusieczną kąta BMD.

Przypadek drugi:



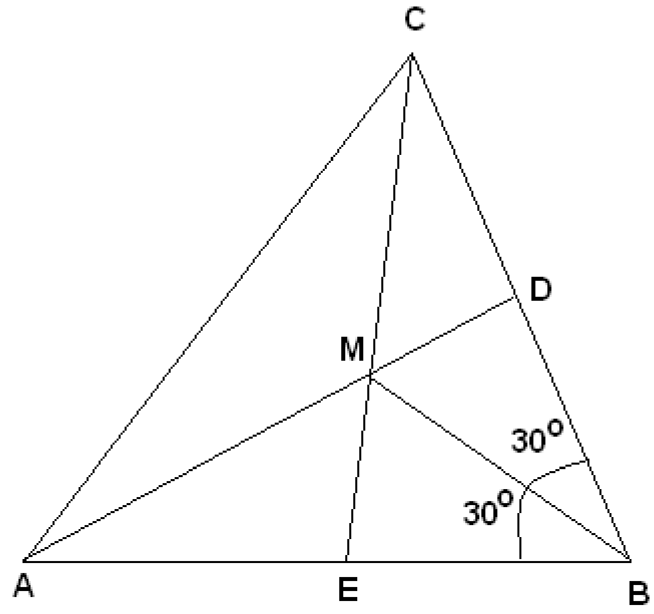
Należy dowieść, że kąt AMT=kąt BMT.

Z rysunku widać, że $\angle AMT = \angle TMP - \angle AMP$, natomiast $\angle BMT = 180^o - (\angle MBT + \angle BTM)$. Na mocy udowodnionego powyżej lematu kąt AMP=kąt MBT. Ponieważ trójkąt MPT jest równoramienny (jego ramionami są obie styczne mniejszego okręgu), więc kąt TMP=kąt ATM. $\angle BTM = 180^o - \angle ATM$. Podstawmy wyznaczone kąty do wyrażenia na kąt BMT.

$$\angle BMT = 180^o - (\angle MBT + \angle BTM) = 180^o - (\angle AMP + (180^o - \angle ATM)) = 180^o - (\angle AMP + 180^o - \angle ATM) =$$
$$= 180^o - \angle AMP - 180^o + \angle ATM = \angle ATM - \angle AMP = \angle PMT - \angle AMP = \angle AMT$$

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ABC, którego kąt wewnętrzny o wierzchołku B ma 60^o. Dwusieczne pozostałych kątów wewnętrznych tego trójkąta, czyli odcinki AD i CE przecinają się w punkcie M. Udowodnij, że |MD|=|ME|.

Rozwiązanie:



Ponieważ kąt ABC ma 60°, więc pozostałe kąty tego trójkąta mają w sumie 120°. Ponieważ kąt MAC jest połową kąta CAE, a kąt ACE jest połową kąta ACB, więc w sumie mają one 60°.kąty te są kątami wewnętrznymi trójkąta AMC. W takim razie trzeci kąt AMC ma 120°. W takim razie kąt EMD też ma 120°. Popatrzmy teraz na czworokąt BDME. Przeciwległe w nim kąty: kąt EBD i kąt EMD maja w sumie 180°. W takim razie druga para kątów przeciwległych ma też w sumie 180°. Oznacza to, że na tym czworokącie można opisać okrąg. Wówczas kąty: kąt EBM i kąt DBM będą kątami wpisanymi w ten okrąg, a że oba mają taką samą miarę, więc opierają się na łukach o tych samych długościach. Tak więc odcinki ME i DM są cięciwami ograniczającymi łuki o tej samej długości, więc mają tę samą długość.