Rozwiązania zadań z numeru 36

Prosta trygonometria

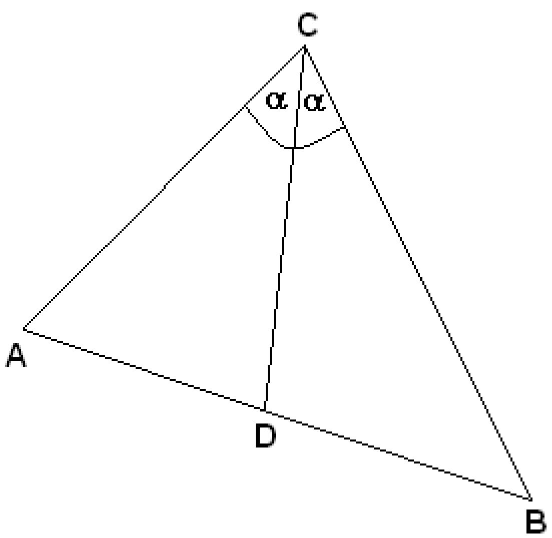
Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC, gdzie kąt ACB jest prosty. Przyprostokątne tego trójkąta mają odpowiednio długości a i b. Znajdź długość odcinka CD łączącego wierzchołek C z przeciwprostokątną AB, jeśli odcinek ten jest dwusieczną kąta prostego.

Rozwiązanie

Rozwiązanie tego zadania zaczniemy od udowodnienia kilku pomocniczych własności.

1. Dwusieczna jednego z kątów trójkąta dzieli bok leżący naprzeciw tego kąta na dwa odcinki takie, że ich stosunek jest równy stosunkowi boków leżących przy tym kącie.

<u>Dowód:</u>

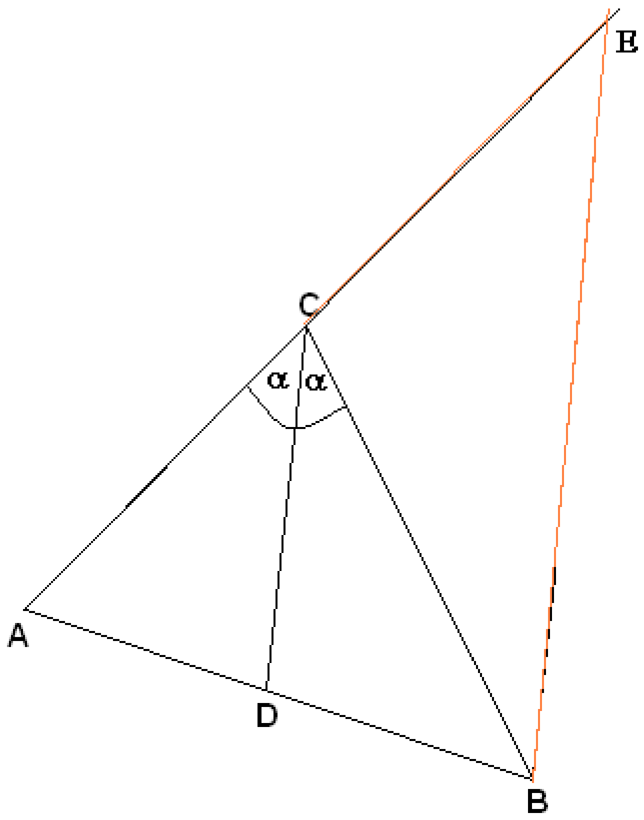


Niech CD jest dwusieczną kąta ACB.

Wystarczy dowieść, że zachodzi równość

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Przedłużmy odcinek AC i dorysujmy odcinek BE||DC



Ponieważ, odcinki CD i EB są do siebie równoległe, więc $|\angle CEB| = |\angle ACD|$. Wynika z tego, że kąt CEB =α.

Podobnie $|\angle CBE| = |\angle BCD|$, czyli kąt CBA=α

Powyższe oznacza, że trójkąt BCE jest równoramienny, czyli |CE|=|CB|.

Na mocy twierdzenia Talesa prawdziwa jest następująca równość

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}$$

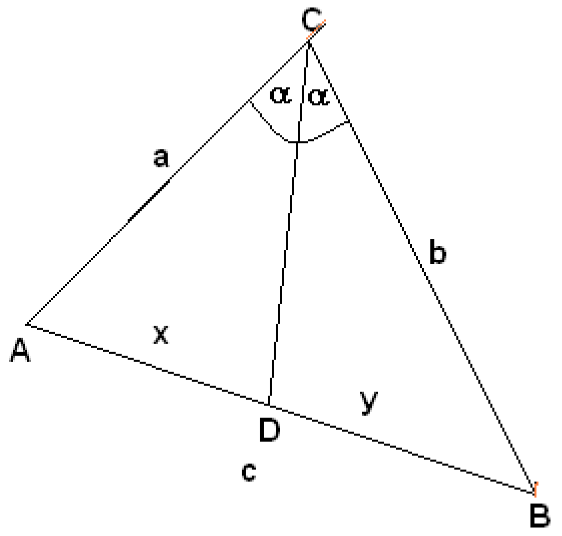
Z uwagi na równość odcinków CE i CB mamy równość, którą chcieliśmy udowodnić, czyli

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

2. Udowodnimy teraz, że jeśli boki trójkąta mają długości a; b i c, to punkt D należący do dwusiecznej kąta o wierzchołku w punkcie C dzieli bok c na odcinki x i y w taki sposób, że

$$x = \frac{bc}{a+b} \qquad i \qquad y = \frac{ac}{a+b}$$

Dowód:



Wystarczy rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{cases} x + y = c \\ \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Drugie równanie układu udowodniliśmy przed chwilą.

Przekształćmy drugie równanie

$$\begin{cases} x + y = c \\ bx = ay \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = c \\ y = \frac{bx}{a} \end{cases}$$

Wstawmy wyznaczone y do równania pierwszego

$$x + \frac{bx}{a} = c$$

$$\frac{ax + bx}{a} = c$$

$$\frac{x(a + b)}{a} = c$$

Ostatecznie

$$x = \frac{ac}{a + b}$$

$$y=\frac{bx}{a}=\frac{b\cdot\frac{ac}{a+b}}{a}=\frac{abc}{a(a+b)}=\frac{bc}{a+b}$$

Przystąpmy teraz do obliczenia długości odcinka CD.

Skorzystamy z trójkąta ACD. Kąt α ma oczywiście 45°.

Z twierdzenia sinusów mamy

$$\frac{|CD|}{\sin(\angle CAD)}=\frac{x}{\sin\alpha}$$

Ponieważ:

$$x=\frac{ac}{a+b}$$

$$\sin\propto=\sin 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\angle CAD)=\frac{b}{c}$$

Nasze równanie przybierze postać

$$\frac{|CD|}{\frac{b}{c}}=\frac{\frac{ac}{a+b}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

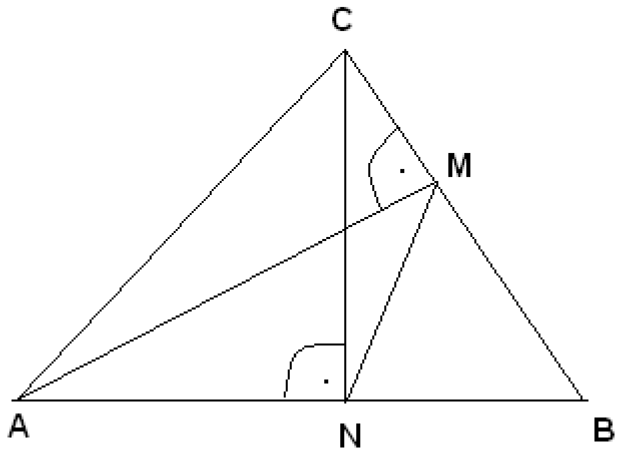
Uprośćmy wyrażenie

$$\frac{c\cdot|CD|}{b}=\frac{2ac}{\sqrt{2}\cdot(a+b)}$$

$$|CD|=\frac{2ab}{\sqrt{2}\cdot(a+b)}=\frac{2\sqrt{2}ab}{2\cdot(a+b)}=\frac{\sqrt{2}ab}{(a+b)}$$

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. W trójkącie tym poprowadzono z wierzchołków A i C wysokości AM i CN. Wiedząc, że pole trójkąta ABC wynosi 18, oraz pole trójkąta MNB jest równe 2, a długość odcinka MN wynosi $2\sqrt{2}$. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC

Rozwiązanie



Dane:

$P_{ABC} = 18$

$P_{BMN} = 2$

$|MN| = 2\sqrt{2}$

Trójkąt ABC jest ostrokątny.

Trójkąty trójkąt ACM i trójkąt ACN są oba prostokątne i dla obu przeciwprostokątną jest odcinek AC. W takim razie na obu można opisać okrąg i będzie to wspólny okrąg dla obu trójkątów, którego środek będzie środkiem odcinka AC. Oznacza to, że na czworokącie ANMC można opisać okrąg, którego środkiem będzie środek odcinka AC. Kąty: kąt AMN i kąt ACN, oba są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, więc są sobie równe. Przyjmijmy, że ich rozwartość wynosi α. Z trójkąta prostokątnego ACN mamy wtedy, że kąt CAB ma rozwartość $90^\circ - \alpha$. Podobnie w trójkącie BMN kąt BMN ma rozwartość $90^\circ - \alpha$.

Jak łatwo teraz zauważyć, trójkąty ABC i BMN są do siebie podobne (mają wspólny kąt ABC, kąt CAB ma taką samą rozwartość jak kąt BMN, więc kąt ACB będzie miał taką samą rozwartość jak kąt BNM. Skala podobieństwa tych trójkątów wynosi:

$$k = \sqrt{\frac{P_{ABC}}{P_{BMN}}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Ponieważ

$$\frac{|AC|}{|MN|} = 3$$

Więc

$$|AC| = 3 \cdot |MN| = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Wyznaczmy teraz cosinus kąta ABC.

Z trójkąta prostokątnego ABM mamy

$$\cos(\angle ABM) = \frac{|MB|}{|AB|}$$

Ponieważ bok AB w trójkącie ABC odpowiada bokowi BM w podobnym do niego trójkącie BMN i skala podobieństwa wynosi 3, więc

$$\frac{|MB|}{|AB|} = \frac{1}{3}$$

Czyli

$$\cos(\angle ABM) = \frac{1}{3}$$

Wyznaczmy sin kąta ABM

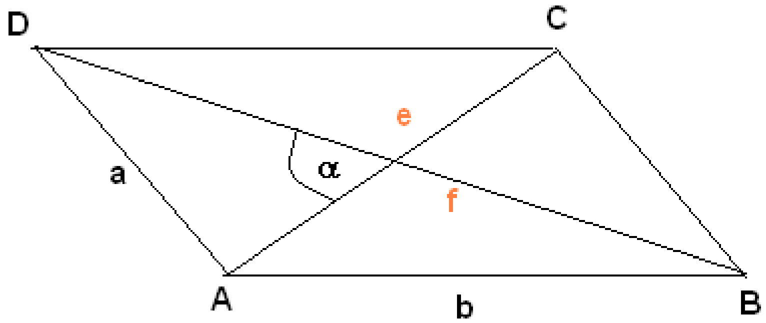
$$\sin(\angle ABM) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$2r = \frac{|AC|}{\sin(\angle ABC)} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}} = 9$$

$$r = 4{,}5$$

Zadanie 3. Dany jest równoległobok o bokach a i b i kącie między przekątnymi równym α. Znajdź pole tego równoległoboku.

Rozwiązanie



Rozwiązanie zadnia zacznijmy od pewnego spostrzeżenia. Jeśli kąt α będzie się równał 90^o, to nasz równoległobok stanie się rombem. a=b i zadanie nie będzie miało jednoznacznego rozwiązania, gdyż będzie zachodziła nierówność

$$0 \leq P_{ABCD} \leq a^2$$

Zatem zakładamy, że $\propto \neq 90^o$

Zauważmy, że nasze przekątne podzieliły równoległobok na cztery trójkąty o tych samych polach. Przy założeniu, że jedna przekątna ma długość e, a druga f, pole jednego trójkąta można obliczyć ze wzoru

$$P_{trójkąta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e \cdot \frac{1}{2} f \cdot \sin \propto = \frac{1}{8} ef \cdot \sin \alpha$$

Zatem pole równoległoboku można policzyć ze wzoru

$$P_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{8} ef \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ef \cdot \sin \propto$$

Wykorzystajmy twierdzenie cosinusów i wyraźmy a za pomocą e i f

$$a^2 = \left(\frac{1}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1}{2}f\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}e\right) \cdot \left(\frac{1}{2}f\right) \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}ef \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1}{2}f\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}e\right) \cdot \left(\frac{1}{2}f\right) \cdot \cos(180^0 - \propto) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{2}ef \cdot \cos \alpha$$

Po odjęciu stronami otrzymamy

$$b^2 - a^2 = ef \cdot \cos \alpha$$

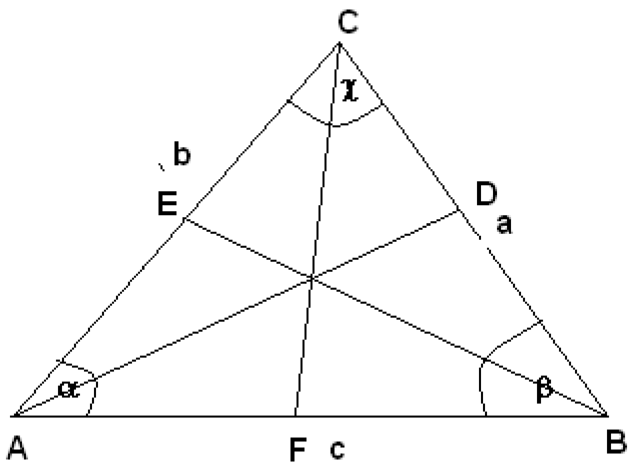
$$ef = \frac{b^2 - a^2}{\cos\alpha}$$

Wstawiając do wzoru na pole równoległoboku otrzymamy

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}ef \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \cdot \tan\alpha$$

Zadanie 4. Oblicz długość środkowych trójkąta ABC znając długości jego boków.

Rozwiązanie



Wyznaczmy cos α

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Obliczmy teraz długość środkowej CF

$$|CF|^2 = b^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - 2b \cdot \left(\frac{1}{2}c\right)\cos\alpha = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$|CF| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2\right)}$$

Dokładnie te same rachunki do prowadzą do wzorów

$$|AD| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - \frac{1}{2}a^2\right)}$$

$$|BE| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2\right)}$$