Marian Maciocha

Żelazny skład – rozwiązanie zadania dla Czytelników

Zadanie:

W pewnym klubie piłki nożnej uprawnionych do gry w barwach tego klubu jest 19 zawodników: 3 bramkarzy, 7 obrońców, 5 pomocników i 4 napastników. Spośród tych 19 zawodników pięciu piłkarzy jest w takiej formie sportowej i ich występ w podstawowym składzie drużyny nie budzi żadnych wątpliwości. Tych pięciu piłkarzy, którzy są w tak znakomitej formie sportowej, że ich wybór do podstawowej jedenastki jest pewny, to jeden bramkarz, dwóch obrońców, jeden pomocnik i jeden napastnik. Obliczyć na ile sposobów można wybrać 11 zawodników do podstawowego składu drużyny tego klubu, jeśli wiadomo, że trener zdecydował, że drużyna rozpocznie mecz w ustawieniu:

a) 3 – 4 – 3,
b) 4 – 3 – 3,
c) 4 – 4 – 2,
d) 5 – 4 – 1.

<u>a – Rozwiązanie:</u>

Wykorzystamy regułę iloczynu („Świat Matematyki” nr 34). Wybór 11 zawodników do podstawowego składu drużyny trener może przeprowadzić w czterech krokach.

Krok pierwszy: Trener wybiera bramkarza. W klubie jest trzech bramkarzy, ale jeden z nich jest w takiej formie, że jego wybór przez trenera należy uznać za oczywisty. Liczbę możliwych wyborów bramkarza obliczymy z wykorzystaniem reguły iloczynu. Wybór jednego bramkarza, czyli zrobienie pierwszego kroku, trener może przeprowadzić w dwóch etapach.

Krok pierwszy. Etap pierwszy: Z pośród jednego, będącego w bardzo dobrej formie bramkarza, trener wybiera jednego bramkarza. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_1^1 = \binom{1}{1} = \frac{1!}{1! * (1-1)!} = \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{1!}{1! * 1} = 1.$$

Krok pierwszy. Etap drugi: Z pośród dwóch, nie będących w bardzo dobrej formie bramkarzy, trener nie wybiera żadnego bramkarza. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_2^0 = \binom{2}{0} = \frac{2!}{0! * (2-0)!} = \frac{2!}{0! * 2!} * \frac{2!}{1 * 2!} = 1.$$

Liczba możliwych wyborów bramkarza wynosi:

$$C_1^1 * C_2^0 = 1 * 1 = 1.$$

Krok drugi: Trener wybiera trzech obrońców. W klubie jest siedmiu obrońców, ale dwóch z nich jest w takiej formie, że ich wybór przez trenera należy uznać za oczywisty. Liczbę możliwych wyborów obrońców obliczymy z wykorzystaniem reguły iloczynu. Wybór trzech obrońców, czyli zrobienie drugiego kroku, trener może przeprowadzić w dwóch etapach.

Krok drugi. Etap pierwszy: Z pośród dwóch, będących w bardzo dobrej formie obrońców, trener wybiera dwóch. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_2^2 = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2! * (2-2)!} = \frac{2!}{2! * 0!} * \frac{2!}{2! * 1} = 1.$$

Krok drugi. Etap drugi: Z pośród pozostałych pięciu, a nie będących w bardzo dobrej formie obrońców, trener wybiera jednego obrońcę. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_5^1 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1! * (5-1)!} = \frac{5!}{1! * 4!} * \frac{5 * 4!}{1 * 4!} = 5.$$

Liczba możliwych wyborów obrońców wynosi:

$$C_2^2 * C_5^1 = 1 * 5 = 5.$$

Krok trzeci: Trener wybiera czterech pomocników. W klubie jest pięciu pomocników, ale jeden z nich jest w takiej formie, że jego wybór przez trenera należy uznać za oczywisty.

Liczbę możliwych wyborów pomocników obliczymy z wykorzystaniem reguły iloczynu. Wybór czterech pomocników, czyli zrobienie trzeciego kroku, trener może przeprowadzić w dwóch etapach.

Krok trzeci. Etap pierwszy: Z pośród jednego, będącego w bardzo dobrej formie pomocnika, trener wybiera jednego. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_1^1 = \binom{1}{1} = \frac{1!}{1! * (1-1)!} = \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{1!}{1! * 1} = 1.$$

Krok trzeci. Etap drugi: Z pośród pozostałych czterech, a nie będących w bardzo dobrej formie pomocników, trener wybiera trzech pomocników. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! * (4-3)!} = \frac{4!}{3! * 1!} * \frac{4 * 3!}{3! * 1} = 4.$$

Liczba możliwych wyborów pomocników wynosi:

$$C_1^1 * C_4^3 = 1 * 4 = 4.$$

Krok czwarty: Trener wybiera trzech napastników. W klubie jest pięciu napastników, ale jeden z nich jest w takiej formie, że jego wybór przez trenera należy uznać za oczywisty. Liczbę możliwych wyborów napastników obliczymy z wykorzystaniem reguły iloczynu. Wybór trzech napastników, czyli zrobienie czwartego kroku, trener może przeprowadzić w dwóch etapach.

Krok czwarty. Etap pierwszy: Z pośród jednego, będącego w bardzo dobrej formie napastnika, trener wybiera jednego. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_1^1 = \binom{1}{1} = \frac{1!}{1! * (1-1)!} = \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{1!}{1! * 1} = 1.$$

Krok czwarty. Etap drugi: Z pośród pozostałych trzech, a nie będących w bardzo dobrej formie napastników, trener wybiera dwóch napastników. Liczba możliwych wyborów wynosi:

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! * (3-2)!} = \frac{3!}{2! * 1!} * \frac{3 * 2!}{2! * 1} = 3.$$

Liczba możliwych wyborów napastników wynosi:

$$C_1^1 * C_3^2 = 1 * 3 = 3.$$

Z reguły iloczynu otrzymujemy liczbę możliwych wyborów składu drużyny:

1 * 5 * 4 * 3 = 60.

<u>*a – Odpowiedź:*</u> Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 60 sposobów.

<u>b – Rozwiązanie:</u>

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak w punkcie a otrzymujemy:

$$C_1^1 * C_2^0 * C_2^2 * C_5^2 * C_1^1 * C_4^2 * C_1^1 * C_3^2 * =$$

$$= \binom{1}{1} * \binom{2}{0} * \binom{2}{2} * \binom{5}{2} * \binom{1}{1} * \binom{4}{2} * \binom{1}{1} * \binom{3}{2} =$$

$$= \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{2!}{0! * (2-0)!} * \frac{2!}{2! * (2-2)!} * \frac{5!}{2! * (5-2)!} *$$

$$* \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{4!}{2! * (4-2)!} * \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{3!}{2! * (3-2)!} =$$

$$= \frac{1!}{} * \frac{2!}{} * \frac{2!}{} * \frac{5!}{} * \frac{1!}{} * \frac{4!}{} * \frac{1!}{} * \frac{3!}{} =$$

$1! * 0! \qquad 0! * 2! \qquad 2! * 0! \qquad 2! * 3! \qquad 1! * 0! \qquad 2! * 2! \qquad 1! * 0! \qquad 2! * 1!$

$$= \frac{1}{1 * 1} * \frac{2!}{1 * 2!} * \frac{2!}{2! * 1} * \frac{5 * 4 * 3!}{2 * 1 * 3!} * \frac{1}{1 * 1} * \frac{4 * 3 * 2!}{2 * 1 * 2!} * \frac{1}{1 * 1} * \frac{3 * 2!}{2! * 1} =$$

$= 1 * 1 * 1 * 5 * 2 * 1 * 2 * 3 * 1 * 3 = 180.$

<u>b – Odpowiedź:</u> Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 180 sposobów.

<u>c – Rozwiązanie:</u>

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak w punkcie a otrzymujemy:

$$C_1^1 * C_2^0 * C_2^2 * C_5^2 * C_1^1 * C_4^3 * C_1^1 * C_3^1 * =$$

$$= \binom{1}{1} * \binom{2}{0} * \binom{2}{2} * \binom{5}{2} * \binom{1}{1} * \binom{4}{3} * \binom{1}{1} * \binom{3}{1} =$$

$$= \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{2!}{0! * (2-0)!} * \frac{2!}{2! * (2-2)!} * \frac{5!}{2! * (5-2)!} *$$

$$* \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{4!}{3! * (4-3)!} * \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{3!}{1! * (3-1)!} =$$

$$= \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{2!}{0! * 2!} * \frac{2!}{2! * 0!} * \frac{5!}{2! * 3!} * \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{4!}{3! * 1!} * \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{3!}{1! * 2!} =$$

$$= \frac{1}{1 * 1} * \frac{2!}{1 * 2!} * \frac{2!}{2! * 1} * \frac{5 * 4 * 3!}{2 * 1 * 3!} * \frac{1}{1 * 1} * \frac{4 * 3!}{3! * 1!} * \frac{1}{1 * 1} * \frac{3 * 2!}{1 * 2!} =$$

$= 1 * 1 * 1 * 5 * 2 * 1 * 4 * 1 * 3 = 120.$

c – Odpowiedź: Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 120 sposobów.

d – Rozwiązanie:

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak w punkcie a otrzymujemy:

$$C_1^1 * C_2^0 * C_2^2 * C_5^3 * C_1^1 * C_4^3 * C_1^1 * C_3^0 * =$$

$$= \binom{1}{1} * \binom{2}{0} * \binom{2}{2} * \binom{5}{3} * \binom{1}{1} * \binom{4}{3} * \binom{1}{1} * \binom{3}{0} =$$

$$= \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{2!}{0! * (2-0)!} * \frac{2!}{2! * (2-2)!} * \frac{5!}{3! * (5-3)!} *$$

$$* \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{4!}{3! * (4-3)!} * \frac{1!}{1! * (1-1)!} * \frac{3!}{0! * (3-0)!} =$$

$$= \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{2!}{0! * 2!} * \frac{2!}{2! * 0!} * \frac{5!}{3! * 2!} * \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{4!}{3! * 1!} * \frac{1!}{1! * 0!} * \frac{3!}{0! * 3!} =$$

$$= \frac{1}{1 * 1} * \frac{2!}{1 * 2!} * \frac{2!}{2! * 1} * \frac{5 * 4 * 3!}{3! * 1 * 2} * \frac{1}{1 * 1} * \frac{4 * 3!}{3! * 1!} * \frac{1}{1 * 1} * \frac{3!}{1 * 3!} =$$

$$= 1 * 1 * 1 * 5 * 2 * 1 * 4 * 1 * 1 = 40.$$

d – Odpowiedź: Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 40 sposobów.