

Rozwiązania

a) Układamy równanie

$$2 \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A + 99$$

$$4 \cdot A = A + 198$$

$$3 \cdot A = 198$$

$$A = 66$$

b) Niech $B = 10 \cdot x + y$, wówczas $10 \cdot x + y = 2 \cdot x \cdot y$, czyli $10 \cdot x = 2 \cdot x \cdot y - y$

więc $10 \cdot x = y \cdot (2 \cdot x - 1)$

Podstawiając teraz kolejno za y liczby jednocyfrowe otrzymamy, że $B=36$

c) Niech $C = 10 \cdot x + y$. Wówczas $10 \cdot x + y = 3 \cdot (x + y)$. Gdy zapiszemy lewą stronę równania inaczej otrzymamy

$$9 \cdot x + x + y = 3 \cdot (x + y)$$

$$9 \cdot x = 2 \cdot (x + y)$$

$$9 \cdot x = 2 \cdot x + 2 \cdot y$$

$$7 \cdot x = 2 \cdot y$$

Czyli $x=2$ i $y=7$. Szukana liczba to 27

d) Niech $D = 10 \cdot x + y$

Wówczas mamy równanie

$$\frac{1}{2} \cdot (10 \cdot x + y) - \frac{1}{3} \cdot (10 \cdot x + y) = x + y$$

$$3 \cdot (10 \cdot x + y) - 2 \cdot (10 \cdot x + y) = 6x + 6y$$

$$30x + 3y - 20x - 2y = 6x + 6y$$

$$4x = 5y$$

Jedynym rozwiązaniem ostatniego równania jest $x=5$ i $y=4$. Szukana liczba, to 54.

e) Niech $E = 10x + y$. Wówczas mamy równanie

$$10x + y + \frac{1}{5}(10x + y) = 10y + x$$

$$50x + 5y + 10x + y = 50y + 5x$$

$$55x = 44y$$

$$5x = 4y$$

Rozwiązaniem w liczbach całkowitych tego równania jest $x=4$ i $y=5$

Poszukiwana liczba $E=45$

f) Liczba F jest postaci $F=10x+y$. Po rozdzieleniu cyfr tej liczby cyframi a i b otrzymamy liczbę postaci

$$1000x + 100a + 10b + y$$

Ma zachodzić warunek

$$(10x + y)^2 = 1000x + 100a + 10b + y$$

$$100x^2 + 20xy + y^2 = 1000x + 100a + 10b + y$$

Łatwo można zauważyć, że y jest liczbą ze zbioru $\{1; 5; 6\}$.

Wstawiając w powyższym równaniu $y=1$, otrzymujemy

$$100x^2 + 20x + 1 = 1000x + 100a + 10b + 1$$

$$100x^2 + 20x = 1000x + 100a + 10b$$

$$10x^2 - 98x = 10a + b$$

Oznacza to, że

$$10x^2 - 98x \geq 0$$

$$x(10x - 98) \geq 0$$

$$x \leq 0 \text{ lub } x \geq 9,8$$

Żadna liczba całkowita nie spełnia tego warunku. Oznacza to, że y nie może być równe 1.

Niech $y=5$. Otrzymujemy wtedy równanie

$$100x^2 + 100x + 25 = 1000x + 100a + 10b + 5$$

a po prostych przekształceniach

$$10x^2 - 90x + 2 = 10a + b$$

Ponieważ prawa strona równania jest nieujemna, więc i lewa strona jest nieujemna, czyli

$$10x^2 - 90x + 2 \geq 0$$

Jak łatwo oszacować, powyższa nierówność zachodzi, gdy x jest ujemne, lub, gdy x jest nie mniejsze od 9.

Ponieważ $95^2 = 9025$, więc rozwiązaniem jest liczba 95. Sprawdźmy jeszcze $y=6$. Niech $y=6$. Otrzymujemy wtedy równanie

$$100x^2 + 120x + 36 = 1000x + 100a + 10b + 6$$

a po prostych przekształceniach

$$10x^2 - 88x + 3 = 10a + b$$

Ponieważ prawa strona równania jest nieujemna, więc i lewa strona jest nieujemna, czyli

$$10x^2 - 88x + 3 \geq 0$$

Jak łatwo oszacować, powyższa nierówność zachodzi, gdy x jest ujemne, lub, gdy x jest nie mniejsze od 9.

Ponieważ $96^2 = 9216$, więc rozwiązaniem jest też liczba 96. Zatem zadanie ma dwa rozwiązania: 95 i 96.

g) podany w tym podpunkcie warunek można zapisać jako

$$10x + y - (10y + x) = 2xy$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$9(x - y) = 2xy$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie w nawiasie jest parzyste. Oznacza to, że

$$x - y = 2 \text{ lub } x - y = 4 \text{ lub } x - y = 6 \text{ lub } x - y = 8$$

Sprawdźmy każdy z tych przypadków oddzielnie

Przypadek I

Gdy $x - y = 2$ to $2xy = 18$, co oznacza, że $xy = 9$. Ponieważ liczby x i y są jednocyfrowe i całkowite, więc $x = 1$ i $y = 9$; lub $x = 3$ i $y = 3$; lub $x = 9$ i $y = 1$. W żadnym z tych przypadków różnica x i y nie równa się 2.

Przypadek II

Gdy $x - y = 4$ to $2xy = 36$, a $xy = 18$. $xy = 18$, gdy $x = 2$ i $y = 9$; lub $x = 3$ i $y = 6$; $x = 6$ i $y = 3$; lub $x = 9$ i $y = 2$. W żadnym z tych przypadków różnica $x - y$ nie jest parzysta, więc i ten przypadek jest niemożliwy.

Przypadek III

Gdy $x - y = 6$, to $xy = 27$, co oznacza, że jedna z cyfr równa się 3 a druga 9. Rzeczywiście, wówczas zachodzi początkowy warunek, czyli szukana liczba to 39 lub 93

Przypadek czwarty jak łatwo sprawdzić, też nie zachodzi.

h) Ten warunek można zapisać $xy = 2x + 2y$. Po przekształceniach mamy

$$xy - 2x = 2y$$

$$x(y - 2) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2y-4+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2} . \text{ Ponieważ } x \text{ i } y \text{ całkowite, więc}$$

$$y-2 = 1 \text{ lub } y-2 = 2 \text{ lub } y-2 = 4$$

Możliwe więc są następujące rozwiązania

(x; y): (6; 3); (4; 4) i (3; 6)

Poszukiwane liczby to: 63; 44 i 36.

i) Liczba może składać się z cyfr 0; 1; 6; 8 i 9. Poszukiwana liczba zbudowana z tych cyfr to 86. Po odwróceniu kartki da 98.