

Zadanie konkursowe „Podróż daleka”

Po kilku podróżach przez pustynię Gobi wybieramy się w drogę, która może zająć wiele dni. W ile osób możemy tego dokonać, gdy do pomocy możemy mieć tylko tragarzy, którzy, podobnie jak my, poruszają się wyłącznie na własnych nogach. Jak można przeprowadzić taką podróż, gdy trasa potrwa wiele dni? Udowodnij, że jeśli podróżnik w czasie podróży przez pustynię ma możliwość zabrać ze sobą żywność wystarczającą na n dni i może zatrudnić dowolną liczbę tragarzy, z których każdy może zabrać ze sobą żywność i wodę wystarczającą również na n dni, to maksymalny czas podróży przez pustynię może wynosić $2n-2$ dni, przy założeniu, że każdy z tragarzy zwolnionych w trakcie podróży, dostanie wodę i żywność wystarczającą na powrót przez pustynię.

Rozwiązanie

Na początek udowodnijmy, że możliwa jest podróż podróżnika przez pustynię trwająca $2n-2$ dni, gdy zabierze on odpowiednią ilość tragarzy i każdy z tragarzy, a także sam podróżnik na podróż zabierze ze sobą żywność potrzebną na przeżycie n dni.

Założmy, że podróżnik zatrudni $n-2$ tragarzy, czyli podróż rozpocznie $n-1$ osób. Pod koniec każdego dnia, albo o świcie po przebudzeniu podróżnik będzie zwalniał jednego tragarza zabierając mu zbędną żywność.

Po pierwszym dniu, każdemu z podróżujących zostanie żywności na jeszcze $n-1$ dni, albo inaczej – po pierwszym dniu w chlebaka każdego podróżującego zwolni się miejsce na jedną rację żywności. Zwolniony tragarz potrzebuje na powrót jedną rację żywności, czyli $n-2$ racje może rozdać podróżującym dalej. Ponieważ dalej łącznie pójdzie $n-2$ ludzi, więc wszyscy swoje chlebaki napełnią do końca i znowu będą mieli zapasy wystarczające na n dni podróży.

Po drugim dniu, każdemu z podróżujących zostanie żywności na jeszcze $n-1$ dni, albo inaczej – po drugim dniu w chlebaka każdego podróżującego zwolni się miejsce na jedną rację żywności. Zwolniony tragarz potrzebuje na powrót dwie racje żywności, czyli $n-3$ racji może rozdać podróżującym dalej. Ponieważ dalej łącznie pójdzie $n-3$ ludzi, więc wszyscy swoje chlebaki napełnią do końca i znowu będą mieli zapasy wystarczające na n dni podróży.

...

Po k -tym dniu, gdzie $k < n-2$, każdemu z podróżujących zostanie żywności na jeszcze $n-1$ dni, albo inaczej – po k -tym dniu w chlebaka każdego podróżującego zwolni się miejsce na jedną rację żywności. Zwolniony tragarz potrzebuje na powrót k racji żywności, czyli $n-k-1$ racji może rozdać podróżującym dalej. Ponieważ dalej łącznie pójdzie $n-k-1$ ludzi, więc wszyscy swoje chlebaki napełnią do końca i znowu będą mieli zapasy wystarczające na n dni podróży.

...

W ten sposób w $n-3$ dniu podróży, będzie już tylko 3 podróżujących (podróżnik i 2 tragarzy). Oczywiście rozpoczną ten dzień podróży z pełnymi chlebakami (z n racjami żywności na osobę). Zwolniony po tym dniu tragarz będzie potrzebował na podróż powrotną $n-3$ racje żywności, czyli dwie racje żywności rozda pomiędzy podróżnika i ostatniego tragarza. Dwaj kontynuujący podróż, będą znowu mieli żywność na n dni dla każdego.

Po $n-2$ dniu podróży zostanie zwolniony ostatni tragarz. Na powrót, będzie on potrzebował $n-2$ racje żywności, czyli jedną rację żywności odda podróżnikowi. W ten sposób podróżnik po przebyciu $n-2$ dni podróży ma nadal żywność na n dni podróży. Zatem $n-2$ dni już przebyte i n dni do przebycia daje $2n-2$ dni podróży.

Założmy teraz, że tragarzy było zatrudnionych tylu, że po $n-2$ dniach podróży zostali jeszcze jacyś tragarze i każdy z nich miał n racji żywności. W takim razie po kolejnym $n-1$ dniu, każdemu z podróżnych zostaje jeszcze żywności na $n-1$ dni. Zwolnienie pozostałych tragarzy po tym dniu nic nie da, gdyż zwolnieni tragarze mają na powrót aż $n-1$ dni i tyle potrzebują żywności, czyli nic nie oddadzą podróżnikowi. Tak więc po przebyciu $n-1$ dni podróży i zwolnieniu wtedy pozostałych tragarzy, na dalszą podróż podróżnik będzie miał tylko $n-1$ racji żywności, czyli starczy mu na łączną podróż długości $2n-2$ dni podróży.